Mat-tanári szak, második évfolyam, első félév

Második zárthelyi — megoldási útmutató

1. Legyen $M=\begin{pmatrix}5&-6\\1&0\end{pmatrix}$ és $v_n=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}$. Ekkor $Mv_n=v_{n+1}$ (2 pont), $k_M(x)=x^2-5x+6$, és így a sajátértékek 2 és 3 (2 pont), megfelelő sajátvektorok pedig $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ (2 pont). Így a kísérő mátrix $\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}$ (1 pont), ennek inverze $\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}$ (1 pont). Innen

$$M^n=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{n+1}-2^{n+1}&3\cdot 2^{n+1}-2\cdot 3^{n+1}\\3^n-2^n&3\cdot 2^n-2\cdot 3^n\end{pmatrix}$$

(2 pont). A $v_0=\begin{pmatrix}11\\3\end{pmatrix}$ és $v_n=M^nv_0$ összefüggések miatt $a_n=5\cdot 3^n-2^{n+1}$ (2 pont).

2. Az eredmény 4^{n-1}. Az első sort adjuk a másodikhoz, majd a második sorból emeljünk ki négyet. Ekkor az eredeti determinánshoz képest csak annyi a változás, hogy a második sorból eltűnik a -1. Most adjuk a második sort a harmadikhoz, és ismét emeljünk ki négyet. Az eljárást folytatva végül olyan determinánst kapunk, amely főátlója csupa 1, alatta mindenütt 0 van. (Az első oszlop szerinti kifejtéssel, és n szerinti indukcióval is megkapható a megoldás.)

3. Ez az előjel ugyanaz, mint az f előjele. Az új kifejtési tag $a_{n,n+1-f(1)}\cdots a_{1,n+1-f(n)}$. Ha g jelöli az ehhez tartozó permutációt, akkor tehát $g(n+1-f(i))=n+1-i$. Ezt kényelmesebb alakba is átírhatjuk, ha bevezetjük a $h(i)=n+1-i$ jelölést, mert ekkor $ghf(i)=h(i)$ adódik. Mivel h is permutáció, a $ghf=h$ összefüggést jobbról f, majd h inverzével szorozva $g=hf^{-1}h^{-1}$ adódik. Ennek előjele pedig a szorzási szabály miatt megegyezik f^{-1}, azaz f előjelével.

(Ezt a megoldást úgy is el lehet mondani, hogy a determinánst előbb a függőleges középvonalára tükrözzük (ez $[n/2]$ oszlopcserét jelent), majd a főátlójára, végül ismét a függőleges középvonalára tükrözzük. Így a determináns értéke nem változik, és mindez együtt a mellékátlóra való tükrözést eredményezi. Ha most a determinánsban a vizsgált kifejtési tag kivételével minden elem nulla, akkor innen éppen az állítás adódik.)

4. Például $(123456789)=(12345)(56789)$. Ha valaki erre nem jön rá, akkor megteheti azt, hogy a tanult képlet segítségével először transzpozíciók szorzatára bont: $(123456789)=(19)(18)(17)(16)(15)(14)(13)(12)$, majd négyenként összevon: $(19)(18)(17)(16)=(16789)$, $(15)(14)(13)(12)=(12345)$, és így $(123456789)=(16789)(12345)$ adódik.

5. Mivel A karakterisztikus polinomja páratlan (ötöd-) fokú, A-nak van egy valós λ sajátértéke. Ez a minimálpolinomnak is gyöke, ami másodfokú, és így a minimálpolinom másik gyöke, μ (ami lehet λ-val egyenlő), szintén valós (2 pont). Azt mutatjuk meg, hogy valamelyik sajátaltér legalább háromdimenziós (1 pont). (Ennek a sajátaltérnek minden altere A-invariáns, és például végtelen sok egydimenziós altere van.) Az állítás nyilvánvaló akkor, ha A diagonalizálható. Ha pedig nem az, akkor a tanult tétel szerint $\lambda=\mu$, és a minimálpolinomba helyettesítve azt kapjuk, hogy $(A-\lambda I)^2=0$. Ezért $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)\supseteq\operatorname{Im}(A-\lambda I)$. E két altér a dimenziótétel miatt összesen ötdimenziós, és így $\dim\operatorname{Ker}(A-\lambda I)\geq 3$ (3 pont).