Mat-tanári szak, második évfolyam, első félév

Első zárthelyi — megoldási útmutató

1. Azt kell belátni, hogy ha U, V, W ugyanazon T test feletti vektorterek, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$ (1 pont), akkor tetszőleges $u \in U$ esetén $(AB)(\lambda u) = \lambda((AB)(u))$ (1 pont). $(AB)(\lambda u) =$ (kompozíció definíciója) $= A(B(\lambda u)) =$ (B skalárszoros-tartó) $= A(\lambda Bu) =$ (A skalárszoros-tartó) $= \lambda A(Bu) =$ (kompozíció definíciója) $= \lambda((AB)(u))$. Ebben az átalakításban minden indoklással ellátott egyenlőség 1 pontot ér.

2. Mivel tükrözés négyzete az identitás, $T^5 = T$, tehát elég T mátrixát kiszámolni (2 pont). Nyilván $T : (1, 0) \mapsto (0, -1)$ és $T : (1, 2) \mapsto (-2, -1)$ (1 pont). Tehát T mátrixának kiszámításához a $(0, -1) = x(1, 0) + y(1, 2)$ és a $(-2, -1) = u(1, 0) + v(1, 2)$ egyenletrendszereket kell megoldani $(1 + 1$ pont). Az eredmény $\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ (1 pont).

3. Nem, sőt az 1, x, x^2 polinomok egyike sincs benne a jobboldali altérben. Ha ugyanis például $1 = \alpha(i + 2x) + \beta(-x^2 + 1) + \gamma(ix^2 + 2x)$ lenne, akkor innen az együtthatókat összehasonlítva $i\alpha + \beta = 1$, $2\alpha + 2\gamma = 0$, $-\beta + i\gamma = 0$ adódik. Ez az egyenletrendszer ellentmondásos, ami akár Gauss-eliminációval, akár közvetlen számolással azonnal látható.

4. A válasz 7. Jelölje V a $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb 7-edfokú elemeiből és a nullapolinomból álló $\mathbb{Q}$ feletti vektorteret, U pedig a feladatban szereplő vektorteret. *Első megoldás.* Legyen $p \in V$ esetén $A(p) = p(2) - p(3)$. Az A lineáris leképezés a $\mathbb{Q}$ testbe, mint önmaga feletti vektortérbe, hiszen $A(p+q) = (p+q)(2) - (p+q)(3) = p(2) - p(3) + q(2) - q(3) = A(p) + A(q)$ (1 pont), és $A(\lambda p) = (\lambda p)(2) - (\lambda p)(3) = \lambda(p(2) - p(3)) = \lambda A(p)$ (1 pont). Az $U = \mathrm{Ker} A$ dimenzióját keressük (2 pont). Nyilván $\mathrm{Im} A = \mathbb{Q}$ (ez közvetlen számolással adódik, vagy például abból következik, hogy az egydimenziós $\mathbb{Q}$-nak csak a két triviális altere van, viszont $A(x) = -1 \neq 0$) (1 pont). Ezért a dimenziótétel miatt $\dim U = \dim V - 1 = 8 - 1 = 7$ (1 pont). *Második megoldás.* Mivel U valódi altér V-ben, hiszen például $x \notin U$ (1 pont), ezért a tanult tétel miatt $\dim U < \dim V = 8$, azaz $\dim U \leq 7$ (2 pont). Ahhoz, hogy belássuk, hogy a dimenzió legalább 7, elég megadni 7 független polinomot U-ban (1 pont). Ilyenek például 1, $(x-2)(x-3)x^i$ $(0 \leq i \leq 5)$, hiszen ezek csupa különböző fokúak (2 pont).

5. Legyen $b_1, \ldots, b_{1998}$ bázis V-ben. Az előírhatósági tétel miatt van olyan $A \in \mathrm{Hom}(V)$, melyre $Ab_1 = 0$ és $Ab_2 = \cdots = Ab_{1998} = b_1$. Mivel $Ab_2 = b_1 \neq 0$, ezért $A \neq 0$. Viszont $i \geq 2$ esetén $A^2 b_i = A(Ab_i) = Ab_1 = 0$, és persze $A^2 b_1 = A(0) = 0$. Vagyis A^2 valamennyi bázisvektort nullába viszi, és így $A^2 = 0$.

6. Az állítás igaz. Tegyük fel először, hogy $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \cap \mathrm{Ker} A = \{0\}$. Be kell látnunk, hogy ha $\lambda_1 Av_1 + \cdots + \lambda_n Av_n = 0$, akkor $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Az A leképezés linearitása miatt $A(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = 0$, és ezért $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in \mathrm{Ker} A$. De nyilvánvalóan $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, tehát feltevésünk miatt $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$. Mivel $v_1, \ldots, v_n$ független, ezért $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Tehát az $Av_1, \ldots, Av_n$ vektorok tényleg lineárisan függetlenek. Megfordítva, tegyük fel, hogy $Av_1, \ldots, Av_n$ lineárisan független, és legyen $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \cap \mathrm{Ker} A$. Be kell látni, hogy $v = 0$. Mivel $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, hogy $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Mivel $v \in \mathrm{Ker} A$, és A lineáris, innen $0 = Av = \lambda_1 Av_1 + \cdots + \lambda_n Av_n$ adódik. Az $Av_1, \ldots, Av_n$ lineáris függetlensége miatt tehát $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, és így $v = 0$.