Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, első félév

Első zárthelyi

A feladatokat **külön lapra írjuk,** és minden lapon legyen rajta **olvashatóan** a szerző és a gyakvezér neve. Az összesen 36 pontból 30 biztosan elég a jeleshez, 12 az elégségeshez, feltéve ha van lényegében megoldott feladat (azaz amelyik legalább 5 pontot kapott). Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont.

1. *(6 pont) Fogalmazzuk meg pontosan, hogy mit jelent, majd bizonyítsuk is be minden lépés esetében részletes indoklással, hogy két lineáris leképezés szorzata skalárszoros-tartó.*

2. *(6 pont) Legyen V a sík, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortér, és T az $y=-x$ egyenesre való tükrözés. Írjuk fel T mátrixát az $(1,0)$, $(1,2)$ bázisban, és számítsuk ki a kapott mátrix ötödik hatványát.*

3. *(6 pont) Teljesül-e* $\langle 1, x, x^2\rangle \subseteq \langle i+2x,\ -x^2+1,\ ix^2+2x\rangle$ a $\mathbb{C}$ *feletti* $\mathbb{C}[x]$ *vektortérben?*

4. *(6 pont) Számítsuk ki* $\dim_{\mathbb{Q}}\left(\{p \in \mathbb{Q}[x] \mid \mathrm{gr}(p) \leq 7 \text{ és } p(2)=p(3)\} \cup \{0\}\right)$ *értékét.*

5. *(6 pont) Legyen V egy 1998-dimenziós vektortér. Konstruáljunk olyan $A \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformációt, melyre $A^2=0$ de $A \neq 0$.*

6. *(6 pont) Legyenek V és W vektorterek T fölött, $v_1, \ldots, v_n$ lineárisan független vektorok V-ben, és $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Igaz-e, hogy $Av_1, \ldots, Av_n$ akkor és csak akkor független, ha $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle \cap \mathrm{Ker} A = \{0\}$?*