Mat-tanári szak, második évfolyam, első félév

RÉSZLETES VIZSGATEMATIKA

A vizsga az eddigiekhez hasonlóan írásbeli lesz. Szerepelni fog egy bizonyítás, amit mindenképpen tudni kell az átmenéshez, és ezt követően az anyag megértését ellenőrző kérdésekre kell válaszolni. Az anyag az, ami az előadáson (vagy a gyakorlaton) elhangzott. Kiegészítő hivatkozások: L = Freud: *Lineáris algebra* (egyetemi tankönyv), F = Fuchs: *Algebra* (egyetemi jegyzet). Az NB jelentése: a bizonyítást nem kell tudni.

Vizsgaidőpontok: január 12. (kedd), és január 26. (kedd) 9-től 1-ig a Gólyavárban, eredményhirdetés ugyanazon a héten pénteken délben. *Konzultációk:* a vizsgát megelőző egy-egy (hétfői) napon, továbbá igény szerint. Az esetleges harmadik vizsga időpontját az érintettekkel a második vizsga eredményhirdetésekor egyeztetjük. Minden további információ a szobám (Rákóczi út 5, 216) melletti nagy faliújságon lesz olvasható.

Absztrakt algebra. Az ideál fogalma gyűrűben. Euklideszi gyűrűben minden ideál főideál (F 3.20). A generátorelem asszociáltság erejéig egyértelmű.

A permutáció fogalma, mint bijektív leképezés. Permutációk kompozíciója, inverze, a szimmetrikus csoport (S_n). A ciklus fogalma, felbontás diszjunkt ciklusok szorzatára, ez egyértelmű. Permutáció rendje a ciklushosszak legkisebb közös többszöröse. Az inverzió fogalma, permutáció paritása (előjele). Szorzat előjele az előjelek szorzata. Következmények: inverz előjele, minden transzpozíció páratlan permutáció. Páros hosszú ciklus páratlan permutáció, páratlan hosszú ciklus páros permutáció. A páros és páratlan permutációk száma megegyezik, az n-edfokú alternáló csoport (A_n). (L 1.1, F II/12.)

Műveletek vektorokkal, lineáris leképezésekkel és mátrixokkal. A vektortér fogalma (a vektortéraxiómák), példák. A bázis fogalma. Vektor koordinátamátrixa adott bázisban (ez egy oszlopvektor). Összeadás és skalárral szorzás definíciója oszlopvektorokra úgy, hogy a vektorhoz a koordinátamátrixát rendelő leképezés művelettartó legyen. A lineáris leképezés fogalma, ennek mátrixa adott bázispárban. A mátrix a lineáris leképezést egyértelműen meghatározza. Kompozíció mátrixa, ennek alapján mátrixok szorzatának definíciója. Lineáris leképezések összege és skalárszorosa, ezek is lineáris leképezések. Mátrixok összegének és skalárszorosának definíciója úgy, hogy a leképezéshez a mátrixát rendelő leképezés művelettartó (azaz lineáris) legyen. $\mathrm{Hom}(V, W)$ vektortér, $\mathrm{Hom}(V)$ gyűrű, sőt egységelemes algebra. A nullatranszformáció és az identitás, ezek mátrixai. A bázistranszformáció képlete, vektor koordinátái új bázisban. (L 2.1, 4.1, 4.7, 5.1, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8.)

A lineáris leképezések előírhatósági tétele (L 5.3). Következmény: minden mátrixhoz tartozik leképezés. Mivel leképezések kompozíciója asszociatív, ebből következik, hogy a mátrixszorzás is az. Hasonlóan látható, hogy az adott méretű mátrixok a mátrixműveletekre vektorteret, ha pedig négyzetesek is, akkor algebrát alkotnak.

Altér, függetlenség, dimenzió. Az altér fogalma: maga is vektortér az eredeti vektortér műveleteire. Altér jellemzése a műveletekre való zártság segítségével. Véges sok vektort tartalmazó *legszűkebb* altér elemei: a generált altér és a lineáris függés fogalma. Generátorrendszer, végesen generált vektortér. (L 4.2, 4.3.)

A lineáris függetlenség és a lineáris kombináció fogalma. A bázis független generátorrendszer. A v vektor akkor és csak akkor függ az X vektorrendszertől, ha X ugyanazt az alteret generálja, mint X és v együtt. Összefüggő vektorrendszerben van olyan vektor, ami a többitől függ. Következmény: minden generátorrendszernek van olyan részhalmaza, ami bázis. A bázisok épp a minimális generátorrendszerek. Minden generátorrendszer elemszáma legalább akkora, mint tetszőleges független rendszer elemszáma (bizonyítás lineáris egyenletrendszerekkel). Következmény: minden bázis elemszáma ugyanaz. A dimenzió fogalma. Ha X független rendszer, de v-vel kiegészítve már összefüggő, akkor v függ X-től. Következmény: véges dimenziós térben minden független rendszer kiegészíthető bázissá. A bázisok pontosan a maximális független rendszerek. Következmény: véges dimenziós vektortér valódi alterének dimenziója kisebb, mint a tér dimenziója. (L 3.3, 4.4, 4.5, 4.6.)

Két altér unióját tartalmazó legszűkebb altér a két altér összege. A direkt összeg és a direkt kiegészítő altér fogalma. Véges dimenziós térben minden altérnek van direkt kiegészítő altere. Képlet az összeg dimenziójára (L 4.6.6. feladat, bizonyítás gyakorlaton).

Lineáris leképezés kép- és magtere, az injektivitás és a szürjektivitás jellemzése. A dimenziótétel. Következmény: véges dimenziós tér lineáris transzformációja akkor és csak akkor injektív, ha szürjektív (L 5.4). Egy lineáris transzformáció akkor és csak akkor bijektív, ha bázist bázisba visz (bizonyítás részben gyakorlaton, vö. L 5.2.5 Tétel).

A balinverz, a jobbinverz és az inverz fogalma. Az invertálható transzformációk épp a bijekciók. Véges dimenziós téren egy lineáris transzformáció akkor és csak akkor invertálható, ha balról (jobbról) invertálható. Négyzetes mátrix inverze, ha MN az egységmátrix, akkor NM is az. Egy transzformáció vagy mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla. Az invertálhatóság további szükséges és elégséges feltétele transzformációkra és mátrixokra, hogy ne legyen egyoldali nullosztó (vö. L 2.2, 3.5). Az inverz mátrix meghatározása Gauss-eliminációval (gyakorlaton).

Mérték és determináns. Az előjeles mérték fogalma. Elemi tulajdonságok: két változó cseréjekor előjelet vált, az egyik változóhoz egy másik skalárszorosát adva a mérték nem változik. Összefüggő vektorrendszer mértéke nulla. (L 9.8.)

Az előjeles mérték változóit permutálva a mérték a permutáció előjelével szorzódik. A mérték tetszőleges vektorokon vett értékének kiszámítása egy bázison felvett értékének segítségével. A kapott képlet alapján a determináns definíciója. Megfordítva, az adott képlet tényleg előjeles mértéket definiál (bizonyítás gyakorlaton, lásd L 1.2, 1.3). Következmények: bármely két nem nulla mérték egymás skalárszorosa; független vektorrendszer mértéke nem azonosan nulla mértékre nézve nem nulla; mátrix determinánsa a mátrix oszlopvektorainak előjeles mértéke (és ezért a determináns a mértékek minden eddig bizonyított tulajdonságával rendelkezik).

A transzponált mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával. Következmény: az oszlopokra bizonyított tulajdonságok sorokra is érvényesek. Az előjeles aldetermináns fogalma, a kifejtési tétel (bizonyítás nélkül). Ferde kifejtés, az inverz mátrix képlete. A Vandermonde-determináns (gyakorlaton). (L 1.4, 1.5.)

Lineáris transzformáció determinánsa: hányszorosára növeli a térfogatot. Ez a skalár mind a választott vektorrendszertől, mind az előjeles mértéktől független. Transzformáció determinánsa megegyezik tetszőleges bázisban felírt mátrixának determinánsával. Kompozíció determinánsa a determinánsok szorzata. Következmény: szorzatmátrix determinánsa a determinánsok szorzata. (L 9.8.)

Sajátérték, minimálpolinom. A sajátérték, sajátaltér és a karakterisztikus polinom fogalma. A karakterisztikus polinom gyökei éppen a sajátértékek. A sajátvektorokból álló bázis és a diagnalizálhatóság. Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek (L 6.1.9 feladat, bizonyítás gyakorlaton). Következmény: ha egy n-dimenziós téren ható transzformáció karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a transzformáció diagonalizálható. (L 6.1, 6.2.) Mátrix hatványozása. Alkalmazás: a Fibonacci sorozat explicit képlete. Példa nem diagonalizálható mátrixra. A Jordan-féle normálalak komplex felett, ennek hatványai (L 6.6, NB).

Transzformáció és mátrix behelyettesítése polinomba. A minimálpolinom fogalma, mint az adott transzformációt eltüntető polinomok ideáljának normált generátoreleme. A minimálpolinom tulajdonságai: ez a legalacsonyabb fokú olyan normált polinom, aminek a transzformáció gyöke; a transzformáció éppen a minimálpolinom többeseinek gyöke. Cayley-Hamilton tétele (NB): minden transzformáció (mátrix) gyöke a karakterisztikus polinomjának. Következmény: a minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak, és gyökei éppen a transzformáció sajátértékei. (L 6.3.)

Az invariáns altér fogalma. A transzformáció mátrixának alakja, ha a bázist invariáns altérben kezdjük el építeni. Felbontás invariáns alterek direkt összegére, ilyenkor a transzformáció mátrixa alkalmas bázisban két blokkból rakható össze. (L 6.4.)

Ha az A transzformáció minimálpolinomja a p és q relatív prím polinomok szorzatára bontható, akkor a tér felbomlik a $p(A)$ és $q(A)$ transzformációk magtereinek direkt összegére, és ezek A-invariáns alterek (L 6.6.2 Tétel). Következmény: az A transzformáció akkor és csak akkor diagonalizálható komplex felett, ha a minimálpolinomjának mindegyik gyöke egyszeres (L 6.6.1 Feladat).

Rang. Vektorrendszer rangja, mint az általa generált altér dimenziója. A rang a maximális lineárisan független részhalmazok elemszáma. Lineáris leképezés rangja, mint képterének dimenziója. Szorzat rangja legfeljebb akkora lehet, mint a tényezők rangja. A leképezés rangja ugyanaz, mint a mátrixának oszlopaiból álló vektorrendszer rangja. Mátrix oszlop-, sor- és determinánsrangja, ezek megegyeznek. A rang a Gauss-elimináció során keletkező vezéregyesek száma. (L 3.4.)

Lineáris egyenletrendszerek. A lineáris egyenletrendszer fogalma és megoldása Gauss-eliminációval. Redukált lépcsős alak, vezéregyesek, tilos sorok, szabad és kötött változók, a megoldások általános képlete és száma. Az egyetlen összefüggés az ismeretlenek száma, az egyenletek száma, és a megoldások száma között: ha kevesebb egyenlet van, mint ismeretlen, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás. Homogén lineáris egyenletrendszer, triviális megoldás. (L 3.1.)

Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának és a megoldás egyértelműségének jellemzése a rang segítségével (L 3.4.3 Tétel, bizonyítás gyakorlaton). A Cramer-szabály (L 3.2, bizonyítás gyakorlaton, NB).