Mat-tanári szak, első évfolyam, második félév

Válaszok a vizsgakérdésekre (1999. február 5.)

2. a) Nem, például polinomok között az $a = 1$, $b = x$, $c = x^2$, $d = x^3$, $e = x^4$, $f = 1 + x^2$ választás is jó. Sőt, a rang mindössze 4 is lehet, ha például $e = x + x^3$.

b) Ez például következik abból, hogy a valódi altér dimenziója kisebb, mint a tér dimenziója (1 pont), és egy nem nulla altér dimenziója pozitív egész (1 pont).

c) Igen, például azok a transzformációk jók lesznek, melyek mátrixában három darab 1-es és egy darab nulla szerepel.

3. a) $6 \cdot 4 = 24$ oszlop van, és $6 \cdot 4^2 = 96$ sor, hiszen a Hom képzésekor a dimenziók összeszorzódnak.

b) 5. A feltételből következik, hogy a mag nem nulla (hiszen nem nulla vektor önmagában független, így képe sem nulla), tehát a dimenziótétel miatt a képtér $5 - 0$ dimenziós.

c) A kísérő mátrix az egységmátrix ellentettje. Az új bázisban minden transzformáció mátrixa ugyanaz, mint a régiben.

d) Ez a lineáris transzformáció ellentettjének definíciója. A baloldali minusz $\mathrm{Hom}(V)$-ben, a jobboldali V-ben értendő.

4. a) Mert ha egy mérték egy bázison nulla, akkor azonosan nulla.

b) 1, 1/2, 1/3 az inverz mátrix képlete miatt.

c) (14)(35), előjel +.

d) Igen, például $3x = 0$, $y + z = 0$ ilyen egyenletrendszer.

5. a) Mivel a karakterisztikus polinom gyökei páronként különbözők, a Jordan-alak diagonális, a főátlóban a sajátértékek, vagyis az $\varepsilon \sqrt[7]{2}$ számok vannak, ahol ε hetedik egységgyök.

b) Igen. A minimálpolinomja, $m_M(x)$ legfeljebb másodfokú, és osztója $(x-1)^4(x-2)^4$-nek. Ezért $m_M(x) = (x-1)^a(x-2)^b$, ahol $a + b \leq 2$. Ezért $m_M(x) \mid (x-1)^2(x-2)^2$.

c) Igen. Ha $w \in \mathrm{Im}(A-I)$, akkor $w = Av - Iv$ alkalmas v-re. Ekkor $Bw = BAv - BIv = A(Bv) - I(Bv) \in \mathrm{Im}(A-I)$.

d) Nem, ez a halmaz nem zárt az összeadásra, például az egységmátrix is felírható n darab 1 rangú (egyetlenegy darab 1-est tartalmazó) mátrix összegeként.