Mat-tanári szak, első évfolyam, második félév
Válaszok a vizsgakérdésekre (1999. január 26.)

2. b) Igen, ha $v = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = \lambda a + \mu d + \nu e$, akkor nullára rendezve és a függetlenséget kihasználva $\beta = \gamma = 0$, vagyis $v \in \langle a, d \rangle$.

c) Kétdimenziós, ez mátrixokkal való számolással látszik. Vagy mondhatjuk azt is, hogy a dimenzió legalább kettő, hiszen A és A^2 nem egymás skalárszorosai, viszont legfeljebb kettő, mert A, A^2, A^3 összefügg: ha $m_A(x) = x^2 + rx + s$, akkor nyilván $A^3 + rA^2 + sA = 0$. (A konkrét esetben $A^3 - A^2 + A = 0$).

3. a) A síkon a szokásos $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ bázist használjuk. A $\mathrm{Hom}(V)$-ben vegyük az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ szokásos $M_1, \ldots, M_4$ bázisának megfelelő $B_1, \ldots, B_4$ transzformációkat. Ekkor

$$[A(B_1)]_e = [B_1(1,2)]_e = [B_1]_{e/e}[(1,2)]_e = M_1[(1,2)]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ez lesz a keresett $[A]_{e/B}$ első oszlopa. A végeredmény

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) 2. Az A magtere nyilván a konstans polinomokból áll, és így a dimenziótétel miatt az eredmény $3 - 1 = 2$. Ez megkapható úgy is, hogy felírjuk A mátrixát, vagy ha kiszámoljuk, hogy A képtere pontosan a legfeljebb elsőfokú polinomokból és a nullapolinomból áll.

c) Ez a lineáris leképezések előírhatósági tétele.

d) Nem. Ha $\lambda = i$, $a = j$, $b = 1$, akkor $\lambda(ab) = a(\lambda b)$ nem teljesül.

4. a) A bizonyítás azon múlik, hogy a nem nulla mértékek egymás skalárszorosai.

b) Önmaga. Ez látszik mátrix-szorzással, a Gauss-eliminációs algoritmussal, vagy akár az inverz mátrix képletéből is.

c) 1. A $(-1)^{f(i)+i}$ számok összeszorzásakor a kitevőbe $2(1 + \cdots + n)$ kerül, hiszen a sorindexek is és az oszlopindexek is az $1, 2, \ldots, n$ egy permutációját alkotják.

d) Nem. Mivel a megoldás egyértelmű, ezért az egyenletrendszer mátrixának oszlopai a tanult tétel szerint függetlenek, és így a determinánsa nem nulla.

5. a) Ha például $u = \alpha v$ lenne, akkor $Av = \lambda v$ esetén a λ-hoz tartozó sajátaltérben benne lenne $\alpha v = u$ is, tehát u is a λ sajátértékhez tartozna (és így $Au = \mu u \implies \mu = \lambda$).

b) Ha U és W is A-invariáns, és $u \in U$, $w \in W$, akkor $A(u+w) = A(u) + A(w) \in U + W$.

c) Nem, hanem az x. A nullapolinom csak akkor lehetne minimálpolinom, ha a transzformáció a nullán kívül semmilyen más polinomnak nem lenne gyöke.

d) Igen. Ilyenkor ugyanis a minimálpolinomnak van többszörös gyöke, tehát legalább másodfokú, és osztója a másodfokú karakterisztikus polinomnak. Tehát a polinomok asszociáltak, és mivel mindkét főegyüttható 1, a két polinom egyenlő.