Mat-tanári szak, első évfolyam, második félév

Válaszok a vizsgakérdésekre (1999. január 12.)

2. a) A dimenzió nyolcnál kisebb, mert a nyolcelemű összefüggő generátorrendszerből elhagyható egy elem úgy, hogy generátorrendszer maradjon. Hétnél nagyobb, mert hétdimenziós térben minden hételemű független rendszer bázis. Tehát egyetlen dimenzióérték sem jön szóba, nincs ilyen vektortér.

b) Igaz. A metszet nulla, mert ha $a = \lambda u + \mu(u + v + w) = \nu(u + w)$, akkor innen átrendezve $(\lambda + \mu - \nu)u + \mu v + (\mu - \nu)w = 0$, és mivel u, v, w független, az együtthatók nullák, ahonnan $\lambda = \mu = \nu = 0$, és így tényleg $a = 0$. A két altér összege viszont az egész tér, mert tartalmazza az $u = u + 0$, $v = (u + v + w) - (u + w)$ és a $w = -u + (u + w)$ vektorokat, vagyis egy generátorrendszert.

c) Kétdimenziósat, hiszen egyik megadott transzformáció sem skalárszorosa a másiknak.

3. a) Az $[Av] = [A][v]$ összefüggést alkalmazva (ahol v az egységmátrix),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ezért az eredmény $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Igen. Legyen $A : V \to W$. Ha egy G generátorrendszer képe egy H generátorrendszer, akkor A szürjektív. Valóban, tetszőleges $w \in W$ felírható H elemeinek lineáris kombinációjaként: $w = \lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_k h_k$, és mivel G képe H, van olyan g_i, hogy $A(g_i) = h_i$ $(1 \le i \le k)$, innen pedig $A(\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k) = w$. Ha viszont A szürjektív, és G' generátorrendszer V-ben, akkor G' képe is generátorrendszer. Valóban, ha $w \in W$, akkor van olyan v, hogy $A(v) = w$, ekkor v felírható G'-beli elemek lineáris kombinációjaként, és A-t alkalmazva w kívánt felírását kapjuk.

c) Nyilván $A : \mathrm{Hom}(V) \to V$. Az előírhatósági tételt V-re alkalmazva látjuk, hogy $B(1,1,1)$ a V tetszőleges eleme lehet, ha B befutja $\mathrm{Hom}(V)$-t. Ezért $\mathrm{Im}A = V$, ami háromdimenziós. Mivel $\mathrm{Hom}(V)$ dimenziója 9, a dimenziótétel miatt az eredmény $9-3 = 6$.

d) Összeadásra és skalárral szorzásra vektortér, összeadásra és szorzásra gyűrű, és még igaz, hogy $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$, ahol a, b az algebra elemei, és λ skalár.

4. b) A megfelelő permutáció $(154)(23)$, az előjel $-$.

c) Igen, például $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinánsa páros, de nem nulla.

5. a) Nem. A sajátértékek, a determináns független a bázistól, és az adott két transzformációnál ezek nem egyeznek, például forgatás determinánsa 1, tengelyes tükrözésé -1.

b) Igen, hiszen ekkor a sajátvektorok generálják a teret. De minden generátorrendszer tartalmaz bázist, ami tehát sajátvektorokból áll. Ebben a bázisban a mátrix diagonális.

c) A főátlóban két egyenlő szám (a sajátérték), felette 0, alatta 1.

d) Igen. Ha $A \in \mathrm{Hom}(V)$, akkor A akkor és csak akkor nullosztó $\mathrm{Hom}(V)$-ben, ha $\mathrm{Ker}A \ne \{0\}$, azaz ha a nulla sajátérték, azaz ha a minimálpolinomnak gyöke a nulla.