Mat-tanári szak, második évfolyam, első félév
Vizsgadolgozat — 1999. február 5.

Minden kérdéscsoportot **külön lapra** írjunk, és minden lapon legyen rajta a szerző és a gyakorlatvezető neve. Aki felírja az *email címét* is, annak a javító igyekszik mihamarabb az eredményét emailben elküldeni. *Eredményhirdetés:* a vizsga napján, délután, Kiss Emil szobájában (Rákóczi út 5, második emelet 216).

Valamennyi megoldásban **indoklás** (azaz bizonyítás vagy ellenpélda) **szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. A kétpontos kérdésekre a válasz általában mindössze egy-két sor, ami sokszor csak egy hivatkozás egy tételre (ez lehet olyan is, amit az előadáson nem bizonyítottunk) vagy egy definícióra. Ne keressünk hosszú, vagy trükkös megoldásokat. A két pont a teljesen helyes és precíz válaszért jár. Aki hibázik, de a lényeget látja, az egy pontot kap, ha a lényeg hiányzik, nulla pontot.

A vizsgán az átmenés szükséges és elégséges feltétele: Lényegében helyesen (azaz apróbb hibáktól eltekintve) le kell írni az első feladatban a bizonyítást, **ÉS** meg kell szerezni a dolgozat összpontszámának felét. Jeles az összpontszám 80 százalékáért jár (ha megvan a bizonyítás is).

1. *(10 pont)*
Definiáljuk a permutációk előjelének fogalmát (2 pont), és bizonyítsuk be (6 pont, hibánként egy pont levonás) a transzponált mátrix determinánsáról szóló tételt. Bizonyítsuk be továbbá a Vandermonde-determináns kifejtéséről szóló tételt (2 pont, aki ezt a részt nem tudja, azért nem jár bukás).

2. *(2+2+2=6 pont)*

a) *Egy vektortérben a kétdimenziós* $V_1 = \langle a, b\rangle$, $V_2 = \langle c, d\rangle$ *és* $V_3 = \langle e, f\rangle$ *alterek közül bármely kettő metszete csak a nullvektorból áll. Következik-e ebből, hogy* $\{a, b, c, d, e, f\}$ *független rendszer?*

b) *Mutassuk meg, hogy egydimenziós vektortérnek csak két altere van.*

c) *A sík lineáris transzformációinak* $\mathbb{R}$ *feletti vektortere generálható-e véges sok invertálható transzformációval?*

3. *(2+2+2+2=8 pont)*

a) *Legyen* $A \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V, W), \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(W)))$, *ahol* V *hatdimenziós és* W *négydimenziós vektortér. Hányszor hányas* A *mátrixa?*

b) *Egy ötdimenziós téren értelmezett lineáris leképezés minden független rendszert független rendszerbe visz. Mennyi a rangja?*

c) *Egy vektortérben egy bázis minden elemének vesszük az ellentettjét. Mi lesz az ehhez a bázistranszformációhoz tartozó kísérő mátrix, és hogyan változnak a lineáris transzformációk mátrixai?*

d) *Ha* $A \in \mathrm{Hom}(V)$, *akkor a* $(-A)(v) = -(A(v))$ *összefüggésben melyik minusz jel melyik struktúrában értendő? Mit fejez ki ez az összefüggés?*

4. *(2+2+2+2=8 pont)*

a) *Miért igaz az, hogy ha egy determináns nulla, akkor az oszlopai lineárisan összefüggenek?*

b) *Egy háromszor hármas* M *mátrix főátlójában az* 1, 2, 3 *számok állnak, felette nulla. Mik állnak* M^{-1} *főátlójában?*

c) *Adjuk meg az* $(12345)^{-1}(234)(135)^{-1}$ *permutáció diszjunkt ciklusokra való felbontását és előjelét.*

d) *Egy egész együtthatós, homogén lineáris egyenletrendszernek* $\mathbb{Z}_2$ *felett két megoldása van. Lehet-e* $\mathbb{Z}_3$ *felett (pontosan) 9 megoldása?*

5. *(2+2+2+2=8 pont)*

a) *Egy* $\mathbb{Q}$ *feletti lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja* $x^7 - 2$. *Mi a Jordan-alakja?*

b) *Az* M *kétszer kettes valós mátrix gyöke az* $(x-1)^4(x-2)^4$ *polinomnak. Gyöke-e akkor az* $(x-1)^2(x-2)^2$ *polinomnak is?*

c) *Tegyük fel, hogy az* A *és* B *lineáris transzformációkra* $AB = BA$. *Következik-e ebből, hogy az* $\mathrm{Im}(A - I)$ *altér* B*-invariáns?*

d) *Ideált alkotnak-e az* $n \times n$*-es mátrixok között azok, melyek rangja kisebb, mint* n*?*