Mat-tanári szak, második évfolyam, első félév
Vizsgadolgozat — 1999. január 26.

Minden kérdéscsoportot **külön lapra** írjunk, és minden lapon legyen rajta a szerző és a gyakorlatvezető neve. Aki felírja az *email címét* is, annak a javító igyekszik mihamarabb az eredményét emailben elküldeni. *Eredményhirdetés:* január 29 (péntek), reggel 12, Kiss Emil szobájában (Rákóczi út 5, második emelet 216).

Valamennyi megoldásban **indoklás** (azaz bizonyítás vagy ellenpélda) **szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. A kétpontos kérdésekre a válasz általában mindössze egy-két sor, ami sokszor csak egy hivatkozás egy tételre (ez lehet olyan is, amit az előadáson nem bizonyítottunk) vagy egy definícióra. Ne keressünk hosszú, vagy trükkös megoldásokat. A két pont a teljesen helyes és precíz válaszért jár. Aki hibázik, de a lényeget látja, az egy pontot kap, ha a lényeg hiányzik, nulla pontot.

A vizsgán az átmenés szükséges és elégséges feltétele: Lényegében helyesen (azaz apróbb hibáktól eltekintve) le kell írni az első feladatban a bizonyítást, **ÉS** meg kell szerezni a dolgozat összpontszámának felét. Jeles az összpontszám 80 százalékáért jár (ha megvan a bizonyítás is).

1. *(10 pont)*
Mondjuk ki (1 pont), és bizonyítsuk is be (6 pont, hibánként egy pont levonás) a generátorrendszerek és a független rendszerek elemszámát összehasonlító tételt. Bizonyítsuk be továbbá **precízen** *azt, hogy véges dimenziós tér valódi alterének dimenziója kisebb, mint a tér dimenziója (3 pont, aki ezt a részt nem tudja, azért nem jár bukás).*

2. *(2+2+2=6 pont)*

a) *Bizonyítsuk be, hogy euklideszi gyűrűben minden ideál főideál.*

b) *Igaz-e hogy* $\langle a,b,c,d\rangle \cap \langle a,d,e\rangle \subseteq \langle a,d\rangle$, *ha* $\{a,b,c,d,e\}$ *független?*

c) *Legyen* A *az origó körüli +60 fokos forgatás. Hánydimenziós a sík lineáris transzformációinak* $\mathbb{R}$ *feletti vektorterében az* $\langle A, A^2, A^3\rangle$ *altér?*

3. *(2+2+2+2=8 pont)*

a) *Legyen* V *a sík, mint* $\mathbb{R}$ *feletti vektortér, és* A *az a leképezés, ami tetszőleges* $B \in \mathrm{Hom}(V)$*-hez* $B(1,2)$*-t rendeli. Írjuk fel* A *mátrixát.*

b) *Legyen* V *a* $\mathbb{Q}[x]$ *legfeljebb másodfokú elemeiből és a nullapolinomból álló* $\mathbb{Q}$ *feletti vektortér, és* $p \in V$ *esetén* $A(p) = p' - p''$ *(ahol a vessző deriváltat jelöl). Határozzuk meg* A *rangját.*

c) *Fogalmazzuk meg pontosan azt a tételt, amiből következik, hogy minden mátrixhoz tartozik lineáris leképezés.*

d) *Algebrát alkotnak-e a kvaterniók* $\mathbb{C}$ *felett a szokásos műveletekre? (A skalárral szorzás kiszámításakor* $\mathbb{C}$ *elemeit is kvaternióknak képzeljük).*

4. *(2+2+2+2=8 pont)*

a) *Bizonyítsuk be, hogy a lineáris transzformációk determinánsa a (definícióban választott) mértéktől független.*

b) *Írjuk fel annak a* 6×6*-os mátrixnak az inverzét, aminek a mellékátlójában csupa 1, másutt csupa nulla szerepel.*

c) *Pistike úgy próbálta kiszámítani egy* $n \times n$*-es determináns kifejtési tagjainak az előjelét, hogy a tényezőket a sakktáblaszabály szerint beelőjelezte, és a kapott előjeleket összeszorozta. Mi jött ki?*

d) *Tegyük fel, hogy egy lineáris egyenletrendszerben az egyenletek és az ismeretlenek száma ugyanaz, és pontosan egy megoldás van. Előfordulhat-e, hogy a Cramer-szabály mégsem alkalmazható?*

5. *(2+2+2+2=8 pont)*

a) *Bizonyítsuk be, hogy két különböző sajátértékhez tartozó sajátvektor mindig független.*

b) *Igazoljuk, hogy két invariáns altér összege is invariáns.*

c) *A nullatranszformációnak a nullapolinom-e a minimálpolinomja?*

d) *Igaz-e, hogy ha egy* $\mathbb{C}$ *feletti kétdimenziós téren ható transzformáció nem diagonalizálható, akkor karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja megegyezik?*