Mat-tanári szak, második évfolyam, első félév
Vizsgadolgozat — 1999. január 12.

Minden kérdéscsoportot **külön lapra** írjunk, és minden lapon legyen rajta a szerző és a gyakorlatvezető neve. Aki felírja az *email címét* is, annak a javító igyekszik mihamarabb az eredményét emailben elküldeni. *Eredményhirdetés:* január 15 (péntek), reggel 12, Kiss Emil szobájában (Rákóczi út 5, második emelet 216).

Valamennyi megoldásban **indoklás** (azaz bizonyítás vagy ellenpélda) **szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. A kétpontos kérdésekre a válasz általában mindössze egy-két sor, ami sokszor csak egy hivatkozás egy tételre (ez lehet olyan is, amit az előadáson nem bizonyítottunk) vagy egy definícióra. Ne keressünk hosszú, vagy trükkös megoldásokat. A két pont a teljesen helyes és precíz válaszért jár. Aki hibázik, de a lényeget látja, az egy pontot kap, ha a lényeg hiányzik, nulla pontot.

A vizsgán az átmenés szükséges és elégséges feltétele: Lényegében helyesen (azaz apróbb hibáktól eltekintve) le kell írni az első feladatban a bizonyítást, **ÉS** meg kell szerezni a dolgozat összpontszámának felét. Jeles az összpontszám 80 százalékáért jár (ha megvan a bizonyítás is).

1. *(10 pont)*
Mondjuk ki (2 pont), és bizonyítsuk is be (6 pont) azt a lemmát, ami a minimálpolinom két tényezőre való felbontásának segítségével a tér direkt összegre való felbontását adja meg. Mondjuk ki precízen azt a tételt is, aminek bizonyításában ezt a lemmát alkalmaztuk (2 pont).

2. *(2+2+2=6 pont)*

a) *Ha egy vektortérben van egy nyolcelemű összefüggő generátorrendszer, és egy hételemű független halmaz, ami nem generátorrendszer, mik a dimenzió lehetséges értékei?*

b) *Legyen $\{u, v, w\}$ bázis egy V vektortérben. Igaz-e mindig, hogy $V = \langle u,\ u+v+w\rangle \oplus \langle u+w\rangle$?*

c) *Hánydimenziós alteret generál a sík lineáris transzformációinak $\mathbb{R}$ feletti vektorterében az origóra illetve az x-tengelyre tükrözés együtt?*

3. *(2+2+2+2=8 pont)*

a) *Legyen A az a lineáris transzformáció az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vektortéren, aminek mátrixa a szokásos bázisban a bal felső sarokban 1-est, a többi helyen nullát tartalmaz. Hová képzi A az egységmátrixot?*

b) *Ha egy lineáris leképezés egy alkalmas generátorrendszert generátorrendszerbe visz, következik-e ebből, hogy minden generátorrendszert generátorrendszerbe visz?*

c) *Legyen V a tér, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortér, és A az a leképezés, ami tetszőleges $B \in \mathrm{Hom}(V)$-hez $B(1,1,1)$-et rendeli. Hánydimenziós $\mathrm{Ker}A$?*

d) *Pistike tudja, mi az a vektortér és a gyűrű. Magyarázzuk el neki az algebra fogalmát.*

4. *(2+2+2+2=8 pont)*

a) *Bizonyítsuk be, hogy az előjeles mérték bármely két változó cseréjénél előjelet vált.*

b) *Adjuk meg az $((a_{ij}))$ mátrix determinánsában az $a_{32}a_{45}a_{23}a_{14}a_{51}$ kifejtési tag előjelét.*

c) *Van-e olyan, a 0 és 1 számokból épített mátrix, aminek a rangja $\mathbb{R}$ felett három, $\mathbb{Z}_2$ felett ennél kevesebb?*

d) *Hogyan jellemezhető egy lineáris egyenletrendszer megoldásának egyértelműsége a rang segítségével?*

5. *(2+2+2+2=8 pont)*

a) *A sík egy bázisában felírjuk az x-tengelyre tükrözés mátrixát, egy másikban a +60 fokos forgatás mátrixát. Lehet-e ugyanaz az eredmény?*

b) *Diagonalizálható-e minden olyan (véges dimenziós téren értelmezett) transzformáció, amelyre igaz, hogy sajátaltereinek összege az egész tér?*

c) *Hogy néz ki egy nem diagonalizálható 2×2-es mátrix Jordan-alakja?*

d) *Egy véges dimenziós téren értelmezett A lineáris transzformáció minimálpolinomjának ismeretében el lehet-e dönteni, hogy A nullosztó-e?*