Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, első félév

Kilencedik alkalom

1. *Bizonyítsuk be, hogy egy négyzetes mátrix determinánsa az oszlopainak előjeles mértéke (azaz az oszlopvektorokban lineáris, és ha két oszlop egyenlő, akkor az értéke nulla).*

2. *Fejtsük ki a múltkori feladatsor 3. feladatában szereplő 3×3-as determinánst a második sor és a harmadik oszlop szerint. Írjuk fel e mátrix inverzét a ferde kifejtési tétel alapján.*

3. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-edrendű, komplex elemű determinánsban a_{ij} az a_{ji} konjugáltja minden i,j-re, akkor a determináns értéke valós.*

4. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

5. *Legyen A egész számokból álló négyzetes mátrix. Igazoljuk, hogy A^{-1} akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha $\det A$ értéke 1 vagy -1.*

6. *Számítsuk ki a sík alábbi transzformációinak determinánsát: az origó körüli α szögű forgatás; az $y=x$-re való tükrözés; az erre való függőleges vetítés; a háromszorosra való, origó középpontú nyújtás.*

7. *Mennyi lehet a sík egy távolságtartó transzformációjának determinánsa? Igaz-e, hogy ha egy transzformáció determinánsa 1, akkor az távolságtartó?*

8*. *Az n lélekszámú Páratlanváros önkormányzata az alábbi rendelkezéseket hozta.*

— *A város bármely klubjának páratlan számú tagja kell, hogy legyen.*
— *Bármely két (különböző) klubnak páros sok közös tagja kell, hogy legyen.*
— *Semelyik két (különböző) klubnak sem lehet azonos a tagsága.*

a) *Adjunk minél általánosabb módszert ilyen tulajdonságú klubrendszerek gyártására.*
b) *Igazoljuk, hogy ha n klubot adunk meg így, akkor minden lakos páratlan sok klubnak kell, hogy tagja legyen.*
c) *Mutassuk meg, hogy a klubok száma legfeljebb n.*

9*. *Bergengócia futball-bajnokságában lezajlott az őszi idény, és azt tapasztalták, hogy nem lehet kiválasztani úgy néhány csapatot, hogy ezek ellen összesen minden csapat (a közülük valók is) páros sok pontot szerzett. Igazoljuk, hogy a résztvevők száma páros. (Náluk még győzelemért 2, döntetlenért 1, vereségért 0 pont jár, mindenki mindenkivel egyszer játszott, saját maga ellen minden csapat nulla pontot szerzett.)*

10.** *Legyen $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_{n-1}x^{n-1}$, és ε_i a $2\pi i/n$ szöghöz tartozó n–edik egységgyök. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, úgynevezett ciklikus determináns értéke*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0)\cdot f(\varepsilon_1)\cdot\ldots\cdot f(\varepsilon_{n-1})\,.$$