Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, első félév

Nyolcadik alkalom

1. *Számítsuk ki a VII/5. feladat permutációnak inverziószámát, és előjelét. Számítsuk ki a VII/6. feladat permutációinak előjelét is.*

2. *Az $((a_{ij}))$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?*

3. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat a definíció alapján és Gauss-eliminációval is.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

4. *Legyen T test, $A \in T^{k\times k}$, $B \in T^{m\times m}$, $X \in T^{k\times m}$ és O az $m \times k$-s nullmátrix. Rakjuk össze az M mátrixot ebből a négy blokkból a következőképpen:*

$$M = \begin{pmatrix} A & X \\ O & B \end{pmatrix}$$

Igazoljuk, hogy $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

5. *Az előző feladatból kiindulva igazoljuk, hogy ha egy determináns főátlója alatt csupa nulla áll, akkor a determináns értéke a főátlóbeli elemek szorzata. Igazoljuk azt is, hogy ha egy négyzetes mátrix determinánsa nem nulla, akkor Gauss-eliminációval mindig ilyen alakra hozható.*

6. *Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$-es mátrixban van egy $m \times k$-as téglalap csupa nullákból, és $m + k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.*

További gyakorló feladatok

7. *Egy determináns minden sora számtani sorozat. Számítsuk ki a determinánst.*

8. *Egy determinánsban minden oszlopösszeg osztható héttel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható héttel.*

9*. *Ismeretes a következő játék. Egy négy egység oldalú négyzetben 15 egységnégyzet helyezkedik el, ezekre rendre az $1-15$ számok vannak írva. A tizenhatodik négyzet helye üres. A kis négyzetek mozgathatók vízszintesen és függőlegesen: az üres négyzet helyére bármelyik (él)szomszédja betolható. A játék célja (a Rubik-kockához hasonlóan) az, hogy egy véletlenszerűen összekevert állapotból visszaállítsuk az alapsorrendet, azaz azt, amelyben a számok sorfolytonosan, emelkedő sorrendben követik egymást, és az üres négyzet a legalsó sor jobb oldalán van.*

Bizonyítsuk be, hogy ez a visszaállítás nem lehetséges abból a helyzetből kiindulva, amely az alapsorrendtől csak abban tér el, hogy a 14-es és 15-ös számú négyzetet megcseréljük (az üres négyzet helye is ugyanaz).

10. *Bizonyítsuk be, hogy az A_n alternáló csoport minden eleme előáll hármasciklusok szorzataként.*