Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, első félév

Hetedik alkalom

Az M négyzetes mátrix inverzének kiszámításához írjuk M mellé jobbról a megfelelő méretű egységmátrixot. A kapott dupla széles mátrixra végezzük a Gauss-eliminációt úgy, hogy vezéregyes kizárólag a baloldali félben keletkezzen. Ha a baloldali mátrix valamelyik sora csupa nulla lesz, akkor M nem invertálható. Ha nem, akkor esetleges sorcserék után a baloldali mátrixból egységmátrix lesz. Ekkor a jobboldali mátrix az M keresett inverze.

1. *Invertáljuk Gauss-elimináció segítségével az alábbi mátrixokat. Ellenőrizzük szorzással a kapott eredményeket. Az utolsó két invertálás házi feladat.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Egy transzformáció mátrixa a sík szokásos bázisában* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Adjuk meg a bázistranszformáció képletét felhasználva ennek a transzformációnak a mátrixát az* $(1,1)$, $(1,2)$ *bázisban.*

3. *Melyek azok a lineáris transzformációk egy véges dimenziós vektortéren, melyeknek minden bázisban ugyanaz a mátrixa?*

4. *Páratlanországban mindenki páratlan sok embernek küldött karácsonyi ajándékot. Bárhogy is választunk ki két embert, azok száma, akiknek ők mindketten küldtek ajándékot, páros. Mutassuk meg, hogy mindenki páratlan számú ajándékot kapott.*

5. *Adjuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását és rendjét. Tegyük meg ugyanezt a 'hátulról előre' permutációval is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

6. *Végezzük el az alábbi műveleteket (és adjuk meg az eredmény ciklusfelbontását).*

$$(1234)(35)(1432)(35) = ? \qquad (12345)^{-1}(234)(12345) = ? \qquad [(12)(23)(34)]^{1998} = ?$$

7. *Bizonyítsuk be az* $(x_1 x_2 \dots x_k) = (x_1 x_k)(x_1 x_{k-1}) \dots (x_1 x_3)(x_1 x_2)$ *összefüggést. Igazoljuk, hogy* S_n *minden eleme előáll legfeljebb* $n-1$ *darab transzpozíció (=2 hosszú ciklus) szorzataként.*

8. *Bizonyítsuk be, hogy az* S_n *csoport minden eleme felírható egy olyan soktényezős szorzat alakjában, melynek minden tényezője* (12) *vagy* $(12 \dots n)$.

9. *Adjuk meg* S_n *összes olyan elemét, mely felcserélhető az* $(1, 2, \dots, n)$ *ciklussal.*

10*. *Legyenek* f, g, h *elemei az* S_n *csoportnak.*

a) *Mutassuk meg, hogy* g *és* $f^{-1}gf$ *diszjunkt ciklusokra való felbontásakor ugyanannyi, ugyanakkora hosszúságú ciklus keletkezik.*

b) *Bizonyítsuk be, hogy ha* g *és* h *diszjunkt ciklusokra való felbontásakor ugyanannyi, ugyanakkora hosszúságú ciklus keletkezik, akkor van olyan* f, *hogy* $h = f^{-1}gf$.