Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, első félév

Hatodik alkalom

1. *Legyen V véges dimenziós vektortér, és U, W alterek V-ben. Bizonyítsuk be, hogy* $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

2. *Egy tízdimenziós térben kiválasztunk három kilencdimenziós alteret. Mekkora lehet a metszetük dimenziója? Adjunk példát minden lehetséges értékre.*

3. *Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$ esetén minden $\mathbb{R}$ feletti n-dimenziós vektortérnek végtelen sok $n-1$-dimenziós altere van (érdemes először konkrét példákon kísérletezni).*

4. *Mutassuk meg, hogy ha U, V, W alterek egy vektortérben és $U \supseteq V$, akkor fennáll az úgynevezett moduláris összefüggés: $U \cap (W+V) = (U \cap W) + V$.*

5. *Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ vektorok egy V vektortérben. Ha a $v_i + v_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$ vektorok rendszere lineárisan független, mennyi lehet n?*

6. *A III/4. feladat lineáris leképezéseinek határozzuk meg a kép- és magterét, és ellenőrizzük a dimenziótétel állítását.*

7. *Alteret alkotnak-e a sík lineáris transzformációinak vektorterében azok a leképezések, melyek az $y = x$ egyenest az x-tengely egy részhalmazába képzik?*

8. *Legyen $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Melyek igazak az alábbi állítások közül?*
- a) *A szürjektív $\iff$ tetszőleges generátorrendszert generátorrendszerbe visz.*
- b) *A szürjektív $\iff$ alkalmas generátorrendszert generátorrendszerbe visz.*
- c) *A injektív $\iff$ alkalmas független rendszert független rendszerbe visz.*
- d) *A injektív $\iff$ alkalmas bázist független rendszerbe visz.*
- e) *A bijektív $\iff$ minden bázist bázisba visz.*

9. *Legyen W a V véges dimenziós vektortér tetszőleges altere. Bizonyítsuk be, hogy V-nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek W a magtere, illetve a képtere.*

10. *Legyen V véges dimenziós vektortér, $A : V \to V$ pedig egy lineáris transzformáció. Ha $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Im}(A)$, következik-e ebből, hogy $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$? Igaz-e a megfordítás?*

11. *Mutassuk meg, hogy egy lineáris leképezés akkor és csak akkor kölcsönösen egyértelmű, ha alkalmas bázispárban mátrixa az egységmátrix.*

12. *Ha egy lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban M, mi lesz a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? A sík mely lineáris transzformációinak lesz minden bázisban ugyanaz a mátrixa?*

13. *Adjunk meg olyan lineáris leképezést, aminek van balinverze, de nincs jobbinverze, és olyat is, aminek van jobbinverze, de nincs balinverze.*

14. *Adjunk meg olyan A és B lineáris transzformációkat egy végtelen dimenziós V vektortéren, melyekre $AB = I$ (az identitás), de BA nem az.*

15. *Mutassuk meg, hogy (véges dimenzió esetén) minden A lineáris leképezéshez van olyan B lineáris leképezés, melyre $ABA = A$ és $BAB = B$.*

További gyakorlásul a Freud-könyv negyedik és ötödik fejezetének feladatait javaslom. Lineáris leképezésekhez különösen ajánlott: 5.1.15, 5.3.4, 5.4.1, 5.4.3, 5.5.1, 5.5.3, 5.7.8.