**Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, első félév**

*Ötödik alkalom*

**1.** *Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?*

*a) Az* $\mathbb{R}$ *feletti* $\mathbb{R}^3$ *vektortérben az alábbi mátrixok oszlopvektorai.*

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&6\\2&0&5\\3&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\3&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

*b) Az* $\mathbb{R}$ *feletti* $\mathbb{R}[x]$ *vektortérben* $\{1, x, x^2\}$, $\{x, 2x, x^2, x^3\}$, $\{1+x, 1+2x, 1+3x\}$, $\{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$.

*c) Az* $\mathbb{R}$ *feletti* $\mathbb{C}$ *vektortérben tetszőleges három komplex szám.*

**2.** *Az alábbi állítások közül melyek igazak?*

*a) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.*

*b) Az egy vektorból álló rendszer mindig független.*

*c) Ha* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *független, akkor tetszőleges* $v$*-re* $\{v_1+v, v_2+v, v_3+v\}$ *is független.*

*d) Ha* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *független, akkor* $\{v_1+v_2, v_2, v_3\}$ *is független.*

**3.** *Igazoljuk az alábbiakat (emlékeztető:* $Y$ *akkor és csak akkor függ* $X$*-től, ha* $Y \subseteq \langle X\rangle$*).*

*a) Egy rendszer akkor és csak akkor független, ha egyik eleme sem függ a többitől.*

*b)* $X \subseteq Y \implies \langle X\rangle \subseteq \langle Y\rangle$.

*c) Generátorrendszert bárhogyan kibővítve generátorrendszert kapunk.*

*d) Ha* $X \subseteq X'$ *és* $Y$ *függ* $X$*-től, akkor* $Y$ *függ* $X'$*-től.*

*e) Független rendszer részrendszere is független.*

*f) Ha* $Z$ *függ* $Y$*-tól és* $Y$ *függ* $X$*-től, akkor* $Z$ *függ* $X$*-től (azaz a függés tranzitív).*

*g) Kicserélési tulajdonság: ha* $F$ *független, és függ* $G$*-től, akkor minden* $f \in F$*-hez van olyan* $g \in G$*, hogy az* $(F - \{f\}) \cup \{g\}$ *rendszer is független (speciálisan tehát* $g \notin F - \{f\}$*). Vezessük le innen, hogy* $|F| \leq |G|$.

**4.** *Az alábbi állítások közül melyek igazak egy* $n$*-dimenziós* $V$ *vektortérben?*

*a) Ha* $F$ *független is és generátorrendszer is, akkor* $F$ *maximális független részhalmaz.*

*b) Ha* $F$ *maximális független, akkor generátorrendszer.*

*c) Ha* $G$ *minimális generátorrendszer, akkor független.*

*d) Bármely két generátorrendszer egyenlő elemszámú.*

*e) Bármely két minimális generátorrendszer egyenlő elemszámú.*

*f) Ha* $F$ *elemszáma* $n$*, és független, akkor generátorrendszer is.*

*g) Ha* $G$ *elemszáma* $n$*, és generátorrendszer, akkor független is.*

*h) Bármely* $n$ *elemű részhalmaz generátorrendszer.*

*i) Van olyan* $n+1$ *elemű részhalmaz, ami generátorrendszer.*

**5.** *Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját.*

*a) A legfeljebb* $n$*-edfokú* $\mathbb{C}$ *feletti polinomok* $\mathbb{R}$ *felett.*

*b) Azon legfeljebb* $n$*-edfokú* $\mathbb{Q}$ *feletti polinomok* $\mathbb{Q}$ *felett, melyeknek 2 gyöke.*

*c) Az* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n$ *azon elemei, melyekben az első koordináta és a koordináták összege is nulla.*

**6.** *Tegyük fel, hogy egy vektortér* $a, b, c, d$ *vektoraira* $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ *mindegyike összefüggő, de* $\{a, b, c\}$ *független. Határozzuk meg* $d$*-t.*