Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, első félév
Negyedik alkalom

Egy halmazrendszer egy M eleme *minimális*, ha M a halmazrendszer egyetlen másik elemét sem tartalmazza (azaz „nincs nála kisebb”). Az M *legszűkebb*, ha részhalmaza a halmazrendszer minden elemének (azaz „ő a legkisebb”). Legyen V vektortér T felett, és $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$. Ekkor $\langle X \rangle = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T\}$ (azaz az $x_1, \ldots, x_n$ vektorok T-beli együtthatós *lineáris kombinációinak* a halmaza) altere V-nek, mégpedig a legszűkebb X-et tartalmazó altér. Ennek neve az X *által generált* altér.

1. *Altér-e a W halmaz a V vektortérben az alábbi esetekben?*
  a) *$V = T[x]$ a T test felett, W a páros fokú polinomok, és a zéruspolinom.*
  b) *V a komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ felett, és $W = \{z \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$.*
  c) *V a komplex számok vektortere $\mathbb{C}$ felett, W ugyanaz, mint az előbb.*
  d) *V a valós számok vektortere $\mathbb{R}$ felett, és W a nemnegatív valós számok halmaza.*
  e) *V a sík $\mathbb{R}$ felett, W pedig az első és harmadik síknegyed uniója.*

2. *Legyen V a sík (helyvektorai), mint $\mathbb{R}$ feletti vektortér.*
  a) *Milyen alakzatot alkothat egy 1 illetve 2 elemmel generált altér?*
  b) *Igazoljuk, hogy minden altér generálható két elemmel. Adjuk meg az összes alteret.*
  c) *A b) állítás eredményére támaszkodva adjuk meg a $\mathbb{C}$ mint $\mathbb{R}$ feletti vektortér, illetve $\mathbb{R}^2$ mint $\mathbb{R}$ feletti vektortér összes alterét. Fogalmazzuk meg precízen, miben hasonlítanak ezek a vektorterek, és hogyan kapcsolódnak egymáshoz altereik.*

3. *Igaz-e $\mathbb{R}$ felett, hogy $x \in \langle x^2-1, x^2-2, 3x+2\rangle$? És $\langle x, x^2+2, x+2\rangle = \langle 1, x+1, x^2+1\rangle$?*

4. *Legyen V vektortér a T test felett.*
  a) *Mi az üres halmaz által generált altér?*
  b) *Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.*
  c) *Mutassuk meg, hogy két altér uniója akkor és csak akkor altér, ha az egyik tartalmazza a másikat.*
  d) *Ha U_1 és U_2 alterek V-ben, akkor legyen $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$. Bizonyítsuk be, hogy alteret kaptunk, és ez a legszűkebb $U_1 \cup U_2$-t tartalmazó altér.*

5. *Adjunk példát olyan V vektortérre, és W részhalmazra, mely az összeadásra zárt, de az ellentett képzésére nem. Mutassuk meg, hogy egy vektortér egy részhalmaza akkor és csak akkor altér, ha nem üres, és zárt a vektortérműveletekre.*

6. *Mutassuk meg a lineáris leképezések megfelelő tulajdonságainak felhasználásával, hogy a mátrixműveletekre $T^{k\times n}$ vektortér, $T^{n\times n}$ pedig algebra.*

7. *Az alábbi halmazrendszerek közül melyeknek van legszűkebb eleme? Mik a minimális elemek? Mutassuk meg, hogy minden halmazrendszernek csak egy legszűkebb eleme lehet.*
  a) *$\mathbb{Z}$ összes részhalmaza.*
  b) *$\mathbb{Z}$ összes nem üres részhalmaza.*
  c) *$\mathbb{Z}$ összes háromelemű részhalmaza.*
  d) *$\mathbb{Z}$ összes páros elemszámú részhalmaza.*
  e) *$\mathbb{Z}$ összes olyan nem üres részhalmaza, ami a kivonásra zárt.*

A feladatsorhoz tartoznak még a Freud-könyv 4.2.7, 4.2.15, 4.3.7 feladatai.