Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, első félév

Harmadik alkalom

Az alábbi vektorterek egy-egy természetesen adódó bázisát a „szokásos" bázisnak nevezzük. A T test feletti T^n vektortérben azon $b_1, \ldots, b_n$ vektorok, melyekre b_i-nek az i-edik komponense 1, a többi komponens nulla. A $T^{k\times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyekben egyetlen komponens 1, a többi nulla (ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük). A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortérben az $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ bázis. A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1,0)$, $(0,1)$ pontok. A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i. Egy T testben, mint önmaga feletti vektortérben az egységelem.

1. *Igazoljuk tetszőleges T test feletti V vektortérben az alábbi állításokat.*

a) $(\forall\lambda \in T)(\lambda 0_V = 0_V)$ *és* $(\forall v \in V)(0_T v = 0_V)$.

b) $(\forall\lambda \in T)(\forall v \in V)(\lambda v = 0_V \implies (\lambda = 0_T \vee v = 0_V))$.

c) $(\forall v \in V)((-1_T)v = -v)$.

2. *Legyen $V = \{a, b\}$, definiáljuk az „összeadást" úgy, hogy $a + a = a + b = b + a = a$, és $b + b = b$. Definiáljuk továbbá tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ és $v \in V$ esetén λv-t v-nek. Mely vektortéraxiómák teljesülnek? Igaz-e, hogy $(-1)v$ ellentettje v-nek minden $v \in V$-re? A $(-1)v = -v$ összefüggés bizonyításában hol használtuk ki, hogy V-ben létezik ellentett?*

3. *Igazoljuk, hogy az összeadás kommutativitása következik a többi vektortéraxiómából.*

4. *Az alábbi $A : V_1 \to V_2$ leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott adjuk meg a leképezés mátrixát is a szokásos, illetve a megadott bázis(pár)ban.*

a) *V_1 és V_2 a sík $\mathbb{R}$ felett, A egy eltolás; az origó körüli $+90$ fokos forgatás; az $y = x$ egyenesre való, függőleges vetítés. A bázis: $b_1 = (1,2)$, $b_2 = (-1,1)$.*

b) *$V_1 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $V_2 = \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ felett, A az $1 + i$ számmal való szorzás.*

c) *$V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, A az $1 + i$ számmal való szorzás.*

d) *$V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(v)$ a v komponenseinek az összege.*

e) *$V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2\times 2}$ az $\mathbb{R}$ felett, A a transzponálás (azaz a főátlóra való tükrözés).*

f) *$V_1 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei, $V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f(i)$.*

g) *$V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb n-edfokú elemei az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f'$ (derivált).*

5. *Legyen V vektortér T felett. Igazoljuk a disztributív szabályokat $\mathrm{Hom}(V)$-ben.*

Könnyű, de **nagyon fontos** *gyakorló feladatok*

6. *Legyenek V és W vektorterek a T test felett, és $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Igazoljuk, hogy $A(0_V) = 0_W$, és $(\forall v \in V)(A(-v) = -A(v))$.*

7. *Igazoljuk, hogy tetszőleges leképezések között a kompozíció művelete mindig asszociatív, továbbá, hogy lineáris leképezések kompozíciója és skalárszorosa is lineáris leképezés.*

8. *Igazoljuk a feladatsor bevezetőjében szereplő struktúrákról, hogy vektorterek, és hogy a megadott vektorok tényleg bázist alkotnak. Mutassuk meg, hogy ha V és W vektorterek T felett, akkor $\mathrm{Hom}(V, W)$ vektortér, $\mathrm{Hom}(V)$ pedig algebra T felett.*

9. *Igazoljuk az előadáson házi feladatnak feladott alábbi összefüggéseket: $[\lambda v]_{\mathbf{b}} = \lambda[v]_{\mathbf{b}}$, $[AB]_{\mathbf{c/a}} = [A]_{\mathbf{c/b}}[B]_{\mathbf{b/a}}$, $[A+B]_{\mathbf{b/a}} = [A]_{\mathbf{b/a}} + [B]_{\mathbf{b/a}}$, $[\lambda A]_{\mathbf{b/a}} = \lambda[A]_{\mathbf{b/a}}$. Mely struktúrák közötti melyik leképezés művelettartását fejezik ki ezek az összefüggések?*