Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, első félév

Második alkalom

Az $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix *nyoma* $tr(M) = a + d$, *determinánsa* pedig $det(M) = ad - bc$. Az *egységmátrix* az $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a *nullmátrix* pedig $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Két mátrixot úgy adunk össze, hogy a megfelelő komponenseket összeadjuk; skalárral mátrixot úgy szorzunk, hogy a mátrix minden komponensét megszorozzuk ezzel a skalárral.

1. *Írjuk fel a múltkori 5. és 6. feladatokban szereplő geometriai transzformációk mátrixát, és oldjuk meg ezeket a feladatokat mátrix-szorzás segítségével.*

2. *Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz? Adjuk meg a megfelelő transzformációk inverzeit, és ezek mátrixait is. Milyen mátrixot kapunk, ha egy transzformáció mátrixát és a transzformáció inverzének a mátrixát összeszorozzuk?*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Igazoljuk, hogy ha M és N kétszer kettes mátrixok, akkor* $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

4. *Végezzük el az*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

szorzást. Fogalmazzuk meg, mely kétszer kettes mátrixoknak van inverze.

5. *Mutassuk meg, hogy ha M kétszer kettes mátrix, akkor $M^2 - tr(M)M + \det(M)E$ a nullmátrix.*

6. *Megoldható-e a kétszer kettes valós mátrixok körében az $X^2 = -I$ egyenlet? Adjuk meg az $X^2 = I$ egyenlet összes megoldását.*

7. *Az M és N mátrixok* felcserélhetők, *ha $MN = NM$. Határozzuk meg azokat a kétszer kettes mátrixokat, amelyek minden kétszer kettes mátrix-szal felcserélhetők.*

8. *Mutassuk meg, hogy a síkon az $(1, 2)$ és $(3, 4)$ pontok(hoz tartozó helyvektorok) bázist alkotnak. Mik ebben a bázisban az $(5, 7)$ pont koordinátái?*

9. *Van-e olyan bázis $\mathbb{R}^3$-ben, melynek első két eleme*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \text{illetve} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}?$$

10. *Mutassuk meg a lineáris egyenletrendszerekről tanultakat felhasználva, hogy a síkon három vektor nem alkothat bázist. Állhat-e egy bázis $\mathbb{R}^3$-ben háromnál több vektorból?*

11.** *A szultán gondolt $\mathbb{R}^{1001}$-ben egy bázist, amit Seherezádénak 1001 éjszaka alatt ki kell találnia, különben kivégzik. Éjszakánként egy általa választott vektorról megkérdezheti, hogy mik a koordinátái. Életben marad-e Seherezádé? Mi a helyzet akkor, ha mindig csak az első koordinátára kérdezhet rá, és a kegyelem feltétele az első bázisvektor kitalálása?*