Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, első félév

Tizenegyedik alkalom

1. *Határozzuk meg a múltkori első feladatban szereplő mátrixok és lineáris transzformációk minimálpolinomját és invariáns altereit. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér. Határozzuk meg egy általános diagonális mátrix minimálpolinomját.*

2. *Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, melyeknek minimálpolinomja elsőfokú?*

3. *Adjunk meg a síkon olyan lineáris transzformációt, melynek minimálpolinomja* x^2.

4. *Igazoljuk, hogy ha* A *és* B *felcserélhető lineáris transzformációk, akkor* A *minden sajátaltere, továbbá* $\mathrm{Im}(A)$ *és* $\ker(A)$ *is* B*-invariáns altér.*

5. *Melyek azok a transzformációk, melyekre minden altér invariáns?*

6. *Oldjuk meg* $\mathbb{Q}^{2\times 2}$*-ben az* $X^4 = 2X$ *egyenletet.*

7. *Legyen* A *lineáris transzformáció a* V *vektortéren, és* $0 \neq v \in V$. *Mutassuk meg, hogy azok a* p *polinomok, melyekre* $p(A)v = 0$, *ideált alkotnak* $T[x]$*-ben.*

8. *Tekintsük* $\mathrm{Hom}(V)$*-ben az* $\{A^i \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$ $(A^0 = I)$ *transzformációk által generált alteret. Hány dimenziós ez az altér?*

9. *Igazoljuk, hogy ha* M *invertálható mátrix, akkor* M^{-1} *polinomja* M*-nek.*

10. *Igazoljuk, hogy egy racionális elemű négyzetes mátrix minimálpolinomja ugyanaz* $\mathbb{Q}$ *és* $\mathbb{C}$ *felett. (Használjuk fel az első gyakorlaton szerepelt állítást homogén racionális együtthatós egyenletrendszerek komplex megoldásairól).*

11. *Tegyük fel, hogy egy* $n \times n$*-es* M *mátrix főátlójában és ezalatt csupa nulla áll. Igazoljuk, hogy* $M^n = 0$.

12. *Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját* $\mathbb{R}$ *felett.*

a) *Az alábbi mátrixok oszlopai. Keressünk rang méretű nem eltűnő aldeterminánst is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) *Az alábbi polinomrendszerek.*

$$\{1, x, x^2\} \qquad \{1+x, 1+2x, 1+3x\} \qquad \{1+x, 1+x^2, x+x^2\} \qquad \{x, 2x, x^2, x^3\}$$

13. *Legyen* $A, B \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$. *Mutassuk meg, hogy* $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$. *Adjunk példát arra az esetre, amikor egyenlőség áll, és arra is, amikor nem.*

14. *Bizonyítsuk be, hogy egy lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha mátrixának rangja egyenlő a kibővített mátrix rangjával. Igazoljuk, hogy ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha a mátrix rangja egyenlő az ismeretlenek számával.*

15. *Igazoljuk, hogy ha egy mátrix oszlopaival elvégezzük a Gauss-eliminációt, akkor oszloprangja is és determinánsrangja is a vezéregyesek száma.*

16. *Bizonyítsuk be a Cramer-szabályt.*