Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, első félév
Tizedik alkalom

1. *Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk illetve mátrixok sajátértékeit, saját-altereit, és karakterisztikus polinomját.*

a) *Az alábbi mátrixok $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

b) *A vektortér a sík $\mathbb{R}$ felett, a transzformáció pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli α szögű forgatás.*

c) *A transzformáció a deriválás az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeinek vektorterén.*

2. *Melyek igazak az alábbi állítások közül?*

a) *Ha λ sajátértéke A-nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2-nek.*

b) *Ha λ^2 sajátértéke A^2-nek, akkor λ sajátértéke A-nak.*

c) *Ha 0 sajátértéke A^2-nek, akkor 0 sajátértéke A-nak.*

d) *$A^2 = 0$ akkor és csak akkor, ha A egyetlen sajátértéke a 0.*

3. *Adjunk explicit képletet az alábbi sorozatok általános elemére.*

a) *$a_0 = a_1 = 1$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ (Fibonacci-sorozat).*

b) *$a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 10$, $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2} + 2a_{k-3}$.*

4. *Legyen A egybevágósági transzformáció a térben, mely a P pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \neq P$ pont, melyet A vagy helyben hagy, vagy P-re tükröz.*

5. *Igazoljuk, hogy páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek.*

6. *Mutassuk meg, hogy ha egy $n \times n$-es mátrixnak n különböző sajátértéke van, akkor ezek összege a mátrix nyoma, szorzatuk pedig a mátrix determinánsa.*

7. *Mutassuk meg, hogy ha a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér k dimenziós, akkor λ legalább k-szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak. Teljesül-e mindig az egyenlőség?*

8.** *Legyen M egy $n \times n$-es valós mátrix. Mely állítások igazak az alábbiak közül?*

a) *Ha $k \to \infty$ esetén M^k (minden eleme) nullához tart, akkor M minden komplex sajátértéke egynél kisebb abszolút értékű.*

b) *Ha M minden komplex sajátértéke egynél kisebb abszolút értékű, akkor $k \to \infty$ esetén M^k (minden eleme) nullához tart.*

További gyakorló feladatok *(lásd még: Freud-könyv, 6. Fejezet)*

9. *Bizonyítsuk be, hogy minden polinom előáll karakterisztikus polinomként.*

10. *Mutassuk meg, hogy tetszőleges transzformációnak ugyanaz a karakterisztikus polinomja, mint (tetszőleges bázisban felírt) mátrixának. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \times n$-es mátrix katakterisztikus polinomja tényleg egy n-edfokú polinom.*

11. *Adjunk explicit képletet az első feladat utolsó két mátrixának k-adik hatványára.*

12. *Adjunk explicit képletet az a_k és b_k számokra, ha tudjuk, hogy $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $a_{k+1} = 2a_k + b_k$, $b_{k+1} = 2b_k - a_k$ $(k \geq 0)$.*