Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, első félév

Első alkalom

1. *Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek* **általános** *megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 14 \\ -3x \phantom{{}- 3y} + 2z &= 3 \\ x - 6y + 14z &= 31 \end{aligned}$$

HF:

$$\begin{aligned} x - y + z + t &= 2 \\ -3x \phantom{{}- y + z} + 3t &= 0 \\ -2x - y + z + 4t &= 2 \\ 4x - y + z - 2t &= 2 \end{aligned}$$

2. *Tekintsünk egy n ismeretlenes, m egyenletből álló, $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t darab (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges). Töltsük ki az alábbi táblázatokat: I jelentse azt, hogy ilyen eset előfordulhat, N pedig azt, hogy nem.*

Általános	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

Homogén	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

3. *Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális komplex megoldása, akkor hány racionális megoldása van? Ha egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszernek van komplex, nem valós megoldása, akkor hány valós megoldása van?*

4. *Legyenek a, b, c valós számok. Az $ax+by+c = 0$ egyenlettel milyen geometriai alakzatot adhatunk meg? Ha két ilyen egyenletet tekintünk, mi a geometriai jelentése a kapott egyenletrendszernek? Jellemezzük geometriailag azt, hogy az egyenletrendszernek 0, 1, illetve végtelen sok megoldása van.*

5. *Jelölje F_α a síkon az origó körüli, pozitív irányú, α szögű forgatást, és $T_{a,b}$ az $ax+by = 0$ egyenesre való tükrözést. Mi lesz az (x, y) pont képe ezeknél a transzformációknál? Milyen geometriai transzformáció lesz $F_\alpha \circ F_\beta$, $F_\alpha \circ T_{a,b}$, $T_{a,b} \circ F_\alpha$, $T_{a,b} \circ T_{c,d}$?*

6. *Legyen A a térben a z-tengely körüli 90 fokos forgatás, ami az x-tengelyt az y-tengelybe viszi, B pedig az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a $(0, 0, 0)$ és $(1, 1, 1)$ pontokat összekötő egyenesre. Mi lesz ezeknél az $(1, 2, 3)$ pont képe? Igaz-e, hogy $A \circ B = B \circ A$?*

7. *Mutassuk meg, hogy a síkon és a térben minden, az origót fixáló egybevágósági transzformáció összegtartó (az (x, y) és (u, v) pontok összege $(x + u, y + v)$).*

8. *Adott n szám úgy, hogy közülük bármely $n - 1$ összege 1998. Melyek ezek a számok? HF: adott $a \neq b$ számok esetén oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{aligned} a\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + a\,x_{n-1} + b\,x_n &= 1 \\ a\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + b\,x_{n-1} + a\,x_n &= 2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + a\,x_{n-1} + a\,x_n &= n \end{aligned}$$

9*. *Egy n-szög csúcsaira számokat akarunk úgy írni, hogy bármelyik csúcsból induljunk is el a sokszög mentén, a sorra következő m szám összege 1 legyen. Mely m és n értékek esetén lehetséges ez úgy, hogy valamelyik csúcsra $1/m$-től különböző szám kerüljön?*