Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Kilencedik alkalom

A kvaterniók szorzását a következőképpen lehet megjegyezni. Az $\{i, j, k\}$ ciklikus sorrendben előrefelé haladva bármely két szomszédos elem szorzata a harmadik, visszafelé haladva bármely két szomszédos elem szorzata a harmadik ellentettje, és mindegyik elem négyzete -1. Összegeket a disztributív szabály alapján szorozhatunk, annak felhasználásával, hogy a valós számok az i, j, k elemekkel felcserélhetők.

1. *Legyen* $\alpha = a + bi + cj + dk$ *kvaternió* $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, *és* $\overline{\alpha} = a - bi - cj - dk$ *az* α *konjugáltja. Számítsuk ki az* α^2 *és az* $\alpha \cdot \overline{\alpha}$ *szorzatokat.*

2. *Igazoljuk, hogy a kvaterniók testében az* $x^2 + 1$ *polinomnak végtelen sok gyöke van. Határozzuk meg az összes gyököt. Oldjuk meg az* $x^2 - 1 = 0$ *egyenletet is.*

3. *Igazoljuk, hogy végtelen sok egész szám van, amely nem áll elő nyolc darab hatodik hatvány összegeként.*

4. *Tegyük fel, hogy az* n *páros egész szám. Milyen maradékot adhatnak nyolccal osztva* $n^4 + 1$ *osztói?*

5. *Tegyük fel, hogy az* n *egész szám osztható hattal. Milyen maradékot adhatnak 12-vel osztva* $n^4 - n^2 + 1$ *osztói?*

6. *Van-e végtelen sok olyan szám, ami nem írható fel három négyzetszám összegeként, és két különböző prímszám szorzata?*

További feladatok

7. *Adjuk meg az összes olyan valós együtthatós másodfokú polinomot, amelynek végtelen sok gyöke van a kvaterniók között.*

8. *Mutassuk meg, hogy az alábbi megfeleltetés gyűrű-izomorfizmus a kvaterniótest, és a* $\mathbb{C}^{2\times 2}$ *mátrixgyűrű egy részgyűrűje között. Igazoljuk ennek felhasználásával, hogy a kvaterniók tényleg gyűrűt alkotnak. Mutassuk meg, hogy ez a megfeleltetés valójában* $\mathbb{R}$ *feletti algebra-izomorfizmus.*

$$a + bi + cj + dk \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R}).$$

9. *Igazoljuk, hogy a* $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ *kvaterniók egy (nyolcelemű) csoportot alkotnak a szorzásra. Határozzuk meg ennek a csoportnak az összes részcsoportját és normálosztóját.*

10. *Oldjuk meg az* $x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot 2^k$ *diofantikus egyenletet* ($k \geq 0$ *adott egész).*

11. *Bizonyítsuk be, hogy minden 23–nál nagyobb egész szám felírható valódi hatványok összegeként. (A valódi hatványok azok, melyeknek alapja is, kitevője is egynél nagyobb pozitív egész. A felbontás lehet egy tényezős is, és ismétlődést is megengedünk.)*

12*. *Oldjuk meg az* $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$ *egyenletet, ahol* x, y, z *racionális számok.*

13*. *Mutassuk meg, hogy* $x^2 + y^2 + z^2 + (z + 1)^2$ *alakban pontosan a néggyel nem osztható pozitív egészek állnak elő* (x, y, z *egészek).*