Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Nyolcadik alkalom

A múltkori első feladat végeredménye a következő. Az x^4-2 polinom $\mathbb{Q}$ feletti felbontási teste $K=\mathbb{Q}(i,\sqrt[4]{2})$. Legyen G a $\mathbb{Q}\le K$ bővítés (azaz az x^4-2 polinom $\mathbb{Q}$ feletti) Galois-csoportja. Ennek a polinomnak a gyökei $\alpha_1=\sqrt[4]{2}$, $\alpha_2=i\alpha_1$, $\alpha_3=-\alpha_1$, $\alpha_4=-i\alpha_1$. A G csoport tekinthető az $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ halmazon ható permutációcsoportnak, mert e négy elem képei már meghatározzák G elemeinek hatását a teljes K halmazon. Az áttekinthetőség kedvéért a permutációk megadásakor az α betűket elhagyjuk, tehát például (13) az a permutáció, ami α_1-et α_3-mal kicseréli, és fixen hagyja az α_2, α_4 elemeket. Ekkor $G\cong D_4$, és ezért K résztestei a D_4 részcsoportjainak felelnek meg az alábbi módon:

$$\begin{aligned}
\{id\} &\longleftrightarrow \mathbb{Q}(i,\sqrt[4]{2}) & \{id,(13)\} &\longleftrightarrow \mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})\\
\{id,(13),(24),(13)(24)\} &\longleftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) & \{id,(24)\} &\longleftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})\\
\{id,(12)(34),(14)(23),(13)(24)\} &\longleftrightarrow \mathbb{Q}(i\sqrt{2}) & \{id,(13)(24)\} &\longleftrightarrow \mathbb{Q}(i,\sqrt{2})\\
\{id,(1234),(13)(24),(1432)\} &\longleftrightarrow \mathbb{Q}(i) & \{id,(12)(34)\} &\longleftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}+i\sqrt[4]{2})\\
D_4 &\longleftrightarrow \mathbb{Q} & \{id,(14)(23)\} &\longleftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}-i\sqrt[4]{2})
\end{aligned}$$

1. *A fenti táblázat felhasználásával határozzuk meg, hogy melyik ismert csoporttal izomorf a* $\mathbb{Q}(i)\le\mathbb{Q}(i,\sqrt[4]{2})$ *illetve a* $\mathbb{Q}\le\mathbb{Q}(i,\sqrt{2})$ *bővítés Galois-csoportja.*

2. *Legyen* ε *primitív harmadik egységgyök. Mi lesz a* $\mathbb{Q}(\varepsilon)\le\mathbb{Q}(\varepsilon,\sqrt[3]{2})$ *bővítés Galois-csoportja?*

3. *Legyen* ε *primitív* n*-edik (komplex) egységgyök, és* $K_n=\mathbb{Q}(\varepsilon)$ *(ez a* Φ_n *körosztási polinom felbontási teste* $\mathbb{Q}$ *felett). Jelölje* G_n *a* $\mathbb{Q}\le K_n$ *bővítés Galois-csoportját.*

a) *Igazoljuk, hogy ha* $g\in G_n$*, akkor van olyan* n*-hez relatív prím* j*, melyre* $g(\varepsilon)=\varepsilon^j$*.*

b) *Igazoljuk, hogy* G_n *egy* $\varphi(n)$ *rendű Abel-csoport.*

c)* *Igazoljuk, hogy* $K_n\cap K_m=K_{(n,m)}$*.*

4. *Mutassuk meg, hogy a Frobenius-tétel feltételei mind szükségesek.*

További gyakorló feladatok

5. *Mutassuk meg az alaptétel felhasználása nélkül, hogy ha* K *részteste* $\mathbb{C}$*-nek, akkor* K *minden másodfokú* L *bővítése normális* K *felett, és e bővítés Galois-csoportja a másodrendű ciklikus csoport. Igaz-e az állítás akkor is, ha a négyelemű testet tekintjük a kételemű felett? És ha a 9 eleműt a háromelemű felett?*

6. *Határozzuk meg az* x^3-2 *polinom* $\mathbb{Q}$ *feletti felbontási testének Galois-csoportját* $\mathbb{Q}$ *felett, és ennek felhasználásával az összes közbülső testeket.*

7. *Jelölje a* $\mathbb{Q}$ *fölött irreducibilis* f *polinom felbontási testét* K*, a* $\mathbb{Q}\le K$ *bővítés Galois-csoportját* G*.*

a) *Igazoljuk, hogy ha* $\gamma\in K$*, akkor* $\prod_{g\in G}(x-g(\gamma))\in\mathbb{Q}[x]$*.*

b) *Igazoljuk, hogy ha* α *és* β *az* f *gyökei, akkor létezik olyan* $g\in G$*, amelyre* $g(\alpha)=\beta$*.*

c) *Tegyük fel, hogy* f*-nek létezik 1 abszolút értékű gyöke és* G *kommutatív. Mutassuk meg, hogy* f *valamennyi gyöke 1 abszolút értékű.*