Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Hetedik alkalom

A $K \leq L\,(\leq \mathbb{C})$ véges bővítés *normális*, ha minden K felett irreducibilis f polinomra igaz, hogy vagy nincs gyöke L-ben, vagy az "összes" gyöke L-ben van, azaz f elsőfokú tényezőkre bomlik L felett (lásd Fuchs: Algebra, VI/7.§.). Normális bővítést kapunk például, ha egy $p \in K[x]$ polinom összes komplex gyökét K-hoz adjungáljuk. Az így kapott testet a p *felbontási testének* nevezzük K felett. A normális bővítések azért fontosak, mert ilyenkor a $K \leq T \leq L$ *közbülső testek* a Galois-elmélet segítségével kiszámíthatók a következőképpen.

A $K \leq T$ bővítés szimmetriája (relatív automorfizmusa) egy olyan izomorfizmusa T-nek önmagára, melynél K elemei önmagukba képződnek. E szimmetriák a kompozícióra nézve a bővítés G Galois-csoportját alkotják. Ha $H \leq G$ (H részcsoportja G-nek), akkor legyen T azon L-beli elemek halmaza, melyek H minden eleménél fixen maradnak. Nyilván $K \leq T \leq L$, és így G minden részcsoportjához egy közbülső testet rendeltünk.

A Galois-elmélet főtétele a következőket mondja ki. Ha $K \leq L$ normális bővítés, akkor a G Galois-csoport rendje épp $|L : K|$, azaz a bővítés foka. Ebben az esetben a fenti megfeleltetés a G részcsoportjai, és a közbülső testek között kölcsönösen egyértelmű. Ha H és T egymásnak felelnek meg, akkor $|H| = |L : T|$ (és így $|G : H| = |T : K|$). A H akkor és csak akkor normálosztó, ha a $K \leq T$ bővítés normális; ilyenkor e bővítés Galois-csoportja éppen a G/H faktorcsoport (Fuchs: VI/11.§.).

1. *Az alábbiak végrehajtásával határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ test összes résztestét.*

a) *Normális-e a $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ bővítés?*

b) *Normális-e a $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ bővítés?*

c) *Legyen G a b)-beli bővítés Galois-csoportja, és $\varphi \in G$. Mi lehet $\varphi(i)$ és $\varphi(\sqrt[4]{2})$?*

d) *Mutassuk meg, hogy ha $\varphi, \psi \in G$, $\varphi(i) = \psi(i)$, és $\varphi(\sqrt[4]{2}) = \psi(\sqrt[4]{2})$, akkor $\varphi = \psi$.*

e) *Az előző két pont alapján igazoljuk, hogy G elemszáma legfeljebb 8.*

f) *Az alaptétel alapján mennyi G elemszáma? Hová vihetik G elemei i-t és $\sqrt[4]{2}$-t?*

g) *Legyen $\alpha_1 = \sqrt[4]{2}$, $\alpha_2 = i\alpha_1$, $\alpha_3 = -\alpha_1$, $\alpha_4 = -i\alpha_1$. Igazoljuk, hogy ha φ és ψ megegyezik az α_1 és α_2 helyeken, akkor $\varphi = \psi$.*

h) *Mi az összefüggés $\varphi(\alpha_1)$ és $\varphi(\alpha_3)$ között?*

i) *Mutassuk meg, hogy ha az α_1, α_2, α_3, α_4 számokat ebben a sorrendben egy négyzet csúcsaira írjuk, akkor G minden eleme a négyzetnek szimmetriája lesz, és így $G \cong D_4$.*

j) *Legyen $\varphi \in G$ az (13) permutációnak megfelelő eleme G-nek. Írjuk fel $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ egy bázisát $\mathbb{Q}$ felett, egy általános elem képét φ-nél, és φ fixpontjainak halmazát.*

k) *Legyen $H = \{id, (24)\}$. Mely testek felelnek meg a H-t tartalmazó részcsoportoknak?*

l) *Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ minden részteste tartalmazza $\mathbb{Q}$-t.*

További gyakorló feladatok

2. *Határozzuk meg $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ összes résztestét (az előző feladatban látott módszerrel).*

3*. *Legyen ε primitív ötödik, illetve 17-edik egységgyök. Határozzuk meg $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ résztesteit.*

4*. *Mutassuk meg, hogy egy negyedfokú bővítésnek kettő, három, vagy öt közbülső teste lehet (a $\mathbb{C}$ résztesteiről van szó).*

5. *Mely $n > 0$ egészekre szerkeszthető n fokos szög?*