Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Hatodik alkalom

Legyen K egy szerkesztési feladat alapadatai által generált részteste $\mathbb{R}$-nek. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ szám akkor és csak akkor szerkeszthető ezekből, ha van olyan $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n$ testlánc, hogy $\alpha \in K_n$, és minden $K_i \subseteq K_{i+1}$ bővítés másodfokú. Belátható, hogy ekkor a K_i testek választhatók úgy is, hogy $K_n = K(\alpha)$ legyen. A fokszámtétel miatt szerkeszthető α esetén $|K(\alpha) : K|$ egy 2-hatvány. Ez szükséges, de nem elégséges feltétele a szerkeszthetőségnek. A szükséges és elégséges feltétel az, hogy K-t az α minimálpolinomjának **összes** komplex gyökével bővítve 2-hatvány fokú bővítést kapjunk.

1. *Az alábbi feladatokban határozzuk meg a K alaptestet, $|K(\alpha) : K|$ értékét, α minimálpolinomja felbontási testének fokát K felett, és döntsük el, hogy a szerkesztés elvégezhető-e.*
  a) *Adott az egységszakasz, szerkesztendő $\alpha = \sqrt[5]{2}$.*
  b) *Adott az egységszakasz, szerkesztendő $\alpha = \sqrt[4]{2}$.*
  c) *Adott az egységszakasz és egy $\sqrt[3]{2}$ hosszú szakasz, szerkesztendő $\alpha = \sqrt[6]{2}$.*
  d) *Adott az egységszakasz és egy $\sqrt[3]{2}$ hosszú szakasz, szerkesztendő $\alpha = \sqrt[5]{2}$.*
  e) *Adott $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,\pi)$, a feladat az egységsugarú kör négyszögesítése.*
  f) *Adott egy szabályos 9-szög a síkon. Szerkesztendő egy szabályos 18-szög. Mi az α?*

2. *Hol a hiba a következő gondolatmenetben? Az egységszakaszból akarunk π hosszú szakaszt szerkeszteni. Vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy a síkon adott egységszakasz két végpontja a $(0,\pi)$ és az $(1,\pi)$ pontokba kerüljön. Ekkor $K = \mathbb{Q}(0,1,\pi)$, amelynek a szerkesztendő szám eleme. Tehát ez a szerkesztés elvégezhető.*

3. *Szerkeszthető-e a háromszög, ha adott két oldalának és az egyikhez tartozó szögfelezőnek a hossza? Válaszoljunk az alábbiak megoldásával. Jelölje (a szokásos módon) az oldalakat a, b, c, a hozzájuk tartozó szögfelezőket f_a, f_b, f_c, a szemköztes szögeket α, β, γ.*
  a) *Mutassuk meg, hogy $f_a = (2bc\cos(\alpha/2))/(b+c)$.*
  b) *Mutassuk meg, hogy $\cos(\alpha/2) = \sqrt{(1+\cos\alpha)/2}$.*
  c) *Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a megadott adatok értéke $a = 1$, $b = 1$, $f_a = 1$. Ha ez nem szerkeszthető, mi a helyzet az általános feladattal?*
  d) *Fejezzük ki ebben az esetben $\cos\alpha$-t az oldalak segítségével.*
  e) *A c-re kapott egyenletből milyen érték adódik c fokára $\mathbb{Q}$ felett?*

4. *Szerkeszthető-e egyenlő szárú háromszög a szárából és a beírt kör sugarából?*

További gyakorló feladatok

5. *Egy „kockás" papíron, csak vonalzóval, meg tudjuk-e szerkeszteni az egyik kis négyzet oldalára illeszkedő szabályos háromszög harmadik csúcsát?*

6. *Az alábbi feladatokban határozzuk meg a szerkesztési lépésekhez tartozó testeket.*
  a) *Adott egy derékszögű háromszög, befogóinak a hossza 4 és 5 egység. Szerkesszük meg a háromszög beírt körét.*
  b) *Szerkesszünk adott egységszakasszal 15 fokos szöget bezáró, a szakasz egyik végpontján átmenő egyenest.*
  c) *Adott az egységszakasz. Szerkesszünk olyan szakaszt, amelynek a hossza β, ahol β az $x^4 - x^2 - 10$ polinom egyetlen pozitív gyöke.*