**Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév**

*Negyedik alkalom*

Legyen $K$ test, $f \in K[x]$, és $L \geq K$ olyan test, amely felett $f$ elsőfokú tényezők szorzatára bontható (azaz $L$ tartalmazza $f$ „összes" gyökét). Ekkor az $L$-ben a $K$ elemei és az $f$ gyökei által generált testet az $f$ polinom $K$ feletti *felbontási testének* nevezzük. Ez nem függ az $L$ választásától abban az értelemben, hogy $K$ feletti izomorfia erejéig egyértelmű.

**1.** *Határozzuk meg az alábbi polinomok felbontási testének fokát.*

a) $x^4 - 2$ *a* $\mathbb{Q}$ *felett.*
b) $x^4 - 2$ *az* $\mathbb{R}$ *felett.*
c) $x^{13} - 2$ *a* $\mathbb{Q}$ *felett.*
d) $x^6 - 2$ *a* $\mathbb{Q}$ *felett.*
e) $x^4 - 2$ *a* $\mathbb{Z}_2$ *felett.*
f) $x^4 - 1$ *a* $\mathbb{Z}_2$ *felett.*
g) $x^4 - x$ *a* $\mathbb{Z}_2$ *felett.*
h) $x^8 - x$ *a* $\mathbb{Z}_2$ *felett.*
i) $x^2 + 1$ *a* $\mathbb{Z}_{17}$ *felett.*
j) $x^2 - 3$ *a* $\mathbb{Z}_{17}$ *felett.*

*További gyakorló feladatok Hermann Pétertől*

**2.** *Jelölje $R$ azon racionális számok halmazát, amelyek felírhatók páratlan nevezőjű törtként. Mutassuk meg, hogy $R$ részgyűrű a racionális számok testében. Részgyűrűt illetve ideált alkotnak-e $R$-ben az $R$ azon elemei, amelyek felírhatók olyan törtként, amelynek a nevezője 3-hatvány? Mutassuk meg, hogy $R$ minden ideálja főideál, és adjuk is meg az összes különböző ideált.*

**3.** *Jelölje $I$ azoknak az egész együtthatós polinomoknak a halmazát, melyek konstans tagja páros. Mutassuk meg, hogy $I$ ideál $\mathbb{Z}[x]$-ben. Hány eleme van a $\mathbb{Z}[x]/I$ faktorgyűrűnek?*

**4.** *Mutassuk meg, hogy ha $f$ olyan másodfokú valós együtthatós polinom, melynek nincs valós gyöke, akkor $\mathbb{R}[x]/(f) \cong \mathbb{C}$.*

**5.** *Adjuk meg a komplex számok testének egy-egy olyan részgyűrűjét, amely $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1)$-gyel, illetve $\mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$-gyel izomorf. Izomorf-e egymással ez a két gyűrű?*

**6.** *Hány gyöke van egy 27-elemű testben az $x^2 - x + 1$ illetve az $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ polinomnak?*

**7.** *Legyen $R$ kommutatív, egységelemes gyűrű, és $a, b \in R$.*

a) *Mutassuk meg, hogy $(a) = (b)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a$ és $b$ asszociáltak (azaz egymás osztói).*
b) *Jelölje $(a, b)$ az $\{ar + bs \mid r, s \in R\}$ halmazt. Mutassuk meg, hogy $(a, b)$ ideál az $R$-ben, mégpedig a legszűkebb olyan ideál, amely $a$-t is és $b$-t is tartalmazza.*
c) *Tegyük fel, hogy van olyan $c \in R$, amelyre $(a, b) = (c)$. Mutassuk meg, hogy akkor $c$* kitüntetett közös osztója a-nak és b-nek *(azaz $c$ osztója $a$-nak és $b$-nek, és osztható $a$ és $b$ mindegyik közös osztójával).*