Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév
Harmadik alkalom

Legyen K test, és $f \in K[x]$ irreducibilis polinom. Tanultuk, hogy az $L = K[x]/(f)$ faktorgyűrű test, és hogy ha $c \in K[x]$ konstans polinom, akkor a $c^* = c + (f)$ maradékosztályok az L-nek egy K-val izomorf résztestét alkotják. Ha tehát a c elemet azonosítanánk c^*-gal, akkor (pongyolán) azt is mondhatnánk, hogy L valójában a K-nak bővítése. Arról is volt szó, hogy az f polinomnak már van gyöke L-ben. Ez az állítás szó szerint értelmetlen, hiszen az f polinomba L elemeit be sem lehet helyettesíteni (maradékosztályok és K-beli elemek között nem értelmeztünk műveletet). De ez a probléma eltűnik, ha K helyett K^*-ra gondolunk.

Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, akkor legyen $f^*(x) = a_0^* + a_1^*x + \cdots + a_n^*x^n$. Az f^* polinomnak már maradékosztályok az együtthatói, és ezért ebbe már tudunk maradékosztályokat helyettesíteni. Helyettesítsük be az $\alpha = x + (f) \in L$ elemet:

$$f^*(\alpha) = (a_0+(f))+(a_1+(f))(x+(f))+\cdots+(a_n+(f))(x+(f))^n = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+(f)\,.$$

De ez épp $f + (f) = 0 + (f)$, ami pedig L nulleleme. Ezért f^*-nak α gyöke.

Ha most K-t és K^*-ot azonosítjuk, akkor persze f is „azonosul” f^*-gal, és **ezért** mondhatjuk azt, hogy L olyan bővítése K-nak, amiben már f-nek van gyöke. Ilyen azonosítások számtalan helyen előfordulnak, például az $1/2$ és $2/4$ törteket is azonosként kezeljük, és K elemeit is azonosítottuk $K[x]$ konstans polinomjaival.

1. *Jelölje $\mathbb{Z}_n$ azt a gyűrűt, melynek elemei $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, és a műveleteket modulo n végezzük. Keressük meg $\mathbb{Z}_8$ összes ideálját, készítsük el a megfelelő faktorgyűrűk műveleti tábláit, és állapítsuk meg, hogy ezek a faktorgyűrűk milyen ismert gyűrűkkel izomorfak.*

2. *Legyen $L = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$. Határozzuk meg L elemszámát, írjuk fel az összeadási és a szorzástábláját, keressük meg benne a $\mathbb{Z}_2^*$ résztestet, és (a fenti bevezető értelmében) adjuk meg L-ben az x^2+x+1 polinom gyökeit. Mi lesz L elemeinek minimálpolinomja $\mathbb{Z}_2^*$ felett?*

3. *Igazoljuk az alábbi állításokat.*
a) $\mathbb{Z}_{12}/(4)$ nem test, de $\mathbb{Z}_{12}/(3)$ igen.
b) $\mathbb{R}[x]/(x^2-1) \not\cong \mathbb{C}$, de $\mathbb{R}[x]/(x^2+2) \cong \mathbb{C}$.
c) $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2) \cong \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
d) $\mathbb{Z}[x]$-nek van olyan faktorgyűrűje, ami test.

4. *A $\mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$ gyűrűben mi az $x + (x^2+x+1)$ inverze?*

További gyakorló feladatok

5. *Oldjuk meg a fenti 2. feladatot abban az esetben, amikor x^2+x+1 helyett x^3+x+1 szerepel. Keressünk ezzel a módszerrel kilenc elemű testet is.*

6. *Mely egész együtthatós f polinomokra lesz a $\mathbb{Z}[x]/(f)$ faktorgyűrű test?*

7. *Milyen ismert gyűrűvel lesz izomorf $\mathbb{C}[x,y]/(x-y)$? Nullosztómentes-e, illetve test-e $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2)$? És $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2)$? (Ez utóbbi kérdés nehezebb.)*