Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Második alkalom

Ha α algebrai K felett, akkor $|K(\alpha):K| = gr_K(\alpha)$, ahol $gr_K(\alpha)$ az α foka K felett, azaz K feletti minimálpolinomjának foka. Ezért ha $\alpha \in L$, akkor $gr_K(\alpha)$ osztja $|L:K|$-t. Az $\alpha \pm \beta$ és $\alpha\beta$ foka legfeljebb akkora lehet, mint α és β fokainak szorzata. Az alábbi feladatok megoldásaiban használjuk fel, hogy az összes körosztási polinom, valamint az $x^4 - 10x^2 + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett (az utóbbi állítást egy éve gyakorlaton (ötödik alkalom, 4. feladat) vért izzadva beláttuk).

1. *Határozzuk meg az alábbi számok minimálpolinomját és fokát $\mathbb{Q}$ felett:* π, $1+i$, $\sqrt{2}+i$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $1+\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, $\cos 20°$, *tetszőleges primitív n-edik egységgyök.*

2. *Határozzuk meg $|\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}|$ értékét, és bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$.*

3. *Határozzuk meg $\sqrt[4]{2}$ fokát a $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ és a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ felett.*

4. *Legyen θ nem valós gyöke az x^3-2 polinomnak. Határozzuk meg θ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ felett, és a $\mathbb{Q}(\theta)\cap\mathbb{R}$ testet. Igaz-e, hogy ha $K \le L \le M$, és $\alpha \in M$, akkor $gr_L(\alpha)$ osztója $gr_K(\alpha)$-nak?*

5. *Mutassuk meg, hogy ha $K \le L$ egy testbővítés, $\alpha, \beta \in L$, és $gr_K(\alpha)$ és $gr_K(\beta)$ relatív prímek, akkor $|K(\alpha+\beta):K| = gr_K(\alpha)gr_K(\beta)$.*

6. *Bizonyítsuk be, hogy ha a és b valós, akkor $a+bi$ pontosan akkor algebrai ($\mathbb{Q}$ felett), ha a is és b is az. A bizonyításban használjuk fel, hogy az algebrai számok testet alkotnak.*

7. *Az alábbi számok közül melyek algebraiak, és melyek transzcendensek:* $\pi+3$, $5\pi+6$, $\pi+\sqrt{2}$, $\pi^2+2\pi+2$, $\sqrt{\pi}$.

További feladatok

8. *Számítsuk ki az alábbi fokszámokat (van közte nehéz is!).*
- a) $|\mathbb{Q}(\cos 23° + i\sin 23°):\mathbb{Q}|$.
- b) $|\mathbb{Q}(\sqrt{2}\sqrt[3]{3}):\mathbb{Q}|$.
- c) $|\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}):\mathbb{Q}|$.
- d) $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$ *foka* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *felett.*
- e) $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$ *foka* $\mathbb{Q}$ *felett.*
- f) $2+\sqrt[3]{\pi}$ *foka* $\mathbb{Q}(\pi)$ *felett.*

9. *Adjuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ egy bázisát $\mathbb{Q}$ felett.*

10. *Egy algebrai szám és egy transzcendens szám összege mikor algebrai? És a szorzatuk? Egy algebrai szám négyzete lehet-e transzcendens? És a négyzetgyöke?*

11. *Adjunk meg egy olyan c számot, melyre $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(c)$.*