Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév
Tizenharmadik alkalom

Azt mondjuk, hogy $f(x) \ll g(x)$, vagy másik jelöléssel $f(x) = o(g(x))$ (kis ordó) ha $f(x)/g(x) \to 0$ amikor $x \to \infty$. Ha $|f(x)/g(x)|$ csak korlátos, akkor azt írjuk, hogy $f(x) = O(g(x))$ (nagy ordó). Ha $f(x)/g(x) \to 1$, akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ és $g(x)$ aszimptotikusan egyenlő, jele $f(x) \sim g(x)$. Az alábbi relációk az analízisből ismeretesek ($a < b$ és c pozitív valós számok):

$$\log\log x \ll \log^c x \ll x^a \ll x^b \ll e^x .$$

Fontosabb számelméleti tételek:

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \log\log x + O(1)$$

(az összegezés az x-nél nem nagyobb p prímekre megy). A Nagy Prímszámtétel:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

(itt $\pi(x)$ az x-nél nem nagyobb prímek száma). A log természetes logaritmust jelöl.

1. *Igazoljuk, hogy* $\sqrt{x} = o(cx/\log(x))$ *minden* $c > 0$ *konstans esetén. Vezessük le ebből (a Nagy Prímszámtétel felhasználásával), hogy több prímszám van, mint négyzetszám.*

2. *Számítsuk ki, hogy Euklidész bizonyításából (miszerint végtelen sok prímszám van) milyen alsó becslés adódik* $\pi(x)$*-re (először becsüljük felülről az* n*-edik prímszámot). Milyen alsó becslés adódik* $\pi(x)$*-re a páros Goldbach-sejtésből? Vezessük le a Nagy Prímszámtételből, hogy végtelen sok olyan egész szám van, ami legalább 1997-féleképpen áll elő két prímszám összegeként.*

3. *Mutassuk meg, hogy legalább* $c\,N^{3/2}$ *olyan* (x, y, z) *pozitív egészekből álló számhármas van, amelyre* $x^2 + y^2 + z^2 \le N$*, ahol* $c > 0$ *alkalmas konstans. Vezessük le ebből, hogy van olyan egész, amelynek legalább egymillió felbontása van három négyzetszám összegére.*

4. *Bizonyítsuk be (a konvergencia kérdésével nem törődve), hogy ha* $1 < s \in \mathbb{R}$*, akkor*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} .$$

5. *Jelölje* p_n *az* n*-edik prímszámot. Mutassuk meg, hogy* $p_n \sim n\log(n)$*. (Vegyük észre, hogy* $\pi(p_n) = n$*, és alkalmazzuk a Nagy Prímszámtételt.)*

6. *Legyen* T *(kommutatív) test. Igazoljuk, hogy* $T[x_1, x_2]$ *(a* T *fölötti kétváltozós polinomok gyűrűje, amit azonosíthatunk* $(T[x_1])[x_2]$*–vel) alaptételes, de nem főideálgyűrű. Mi a szükséges és elégséges feltétele, hogy* $x_1^2 + x_2^2$ *felbonthatatlan legyen* $T[x_1, x_2]$*-ben?*

7. *Legyen* T *test. Fogalmazzuk meg a Schönemann-Eisenstein kritérium* $T[x_1, x_2]$*-beli megfelelőjét, és igazoljuk, hogy* $x_2^{1997} + x_1(x_2^{20} + 2x_2^7 + 85x_2 + 26)$ *felbonthatatlan eleme* $\mathbb{Q}[x_1, x_2]$*-nek.*