Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév
Tizenkettedik alkalom

Minden gyűrű amit most tekintünk *integritási tartomány,* azaz kommutatív és nullosztómentes. Egy gyűrű *alaptételes* (=UFD=Unique Factorization Domain), ha minden nullától és egységtől különböző eleme sorrendtől és asszociáltságtól eltekintve egyértelműen felbontható felbonthatatlan elemek szorzatára. Egy R gyűrű *euklideszi,* ha elvégezhető benne a maradékos osztás, azaz értelmezve van nem nulla elemein egy nemnegatív egész értékű φ függvény úgy, hogy minden $a, b \in R$, $b \neq 0$ esetén létezik olyan $q, r \in R$, melyre $a = bq + r$, és $r = 0$ vagy $\varphi(r) < \varphi(b)$. Főpéldák: egész számok, test feletti polinomgyűrű, Gauss-egészek. Minden euklideszi gyűrű *főideálgyűrű,* azaz minden ideálja főideál. Minden főideálgyűrűben létezik a legnagyobb közös osztó, és teljesül rá a kiemelési tulajdonság: $(ac, bc) = (a, b)c$, és ezért minden felbonthatatlan elem prím. Így az irreducibilisekre való felbontás *egyértelmű.* Főideálgyűrű mindig alaptételes (azaz a felbontás létezik is). Egységelemes alaptételes gyűrű feletti polinomgyűrű is alaptételes, ezért például $\mathbb{Z}[x]$ is az, noha nem főideálgyűrű (és így nem is euklideszi), mert a 2 és x által generált ideál nem főideál.

1. *Alaptételes-e a páros számok gyűrűje? Mutassuk meg, hogy ha egy integritási tartományban van prím, akkor az egységelemes. Mely alaptételes gyűrűkben nincs prím?*

2. *Legyen R a páratlan nevezőjű törtek részgyűrűje $\mathbb{Q}$-ban.*
- a) *Határozzuk meg az egységeket, a felbonthatatlanokat és a prímeket. Hány prím van asszociáltság erejéig (azaz asszociált prímeket nem tekintve különbözőknek)?*
- b) *Vizsgáljuk meg, igaz-e az alaptétel.*
- c) *Főideálgyűrű-e R? Euklideszi-e R?*
- d) *A kapott tapasztalatok alapján konstruáljunk olyan alaptételes gyűrűt, melyben asszociáltság erejéig pontosan hat darab prím van.*

3. *Igaz-e, hogy ha egy alaptételes gyűrűben asszociáltság erejéig csak véges sok prím van, akkor az euklideszi? Mutassuk meg, hogy ha egy alaptételes gyűrűben csak véges sok prím van (az asszociáltakat is különbözőnek tekintjük), akkor az egy véges test.*

4*. *Legyen R euklideszi gyűrű a φ függvényre nézve, és $r \in R$ tetszőleges nem nulla elem. Tekintsük r összes s többszörösét R-ben, készítsük el a $\varphi(s)$ számokat, és jelölje $\varphi'(r)$ ezen számok közül a(z egyik) legkisebbet. Bizonyítsuk be, hogy hogy R a φ'-re nézve is euklideszi gyűrű, és a φ' függvény szigorúan monoton az oszthatóságra nézve, azaz ha $a \mid b$, akkor $\varphi'(a) \leq \varphi'(b)$, és egyenlőség csak akkor lehetséges, ha $a \sim b$. Vezessük le ebből közvetlenül, hogy R-ben minden elem felbontható felbonthatatlanok szorzatára.*

5. *Legyen R nullosztómentes, egységelemes, kommutatív gyűrű. Igazoljuk az alábbiakat.*
- a) *Ha $a, b, r \in R$ és $a \sim b$, akkor $ar \sim br$ (a $\sim$ asszociáltságot jelöl).*
- b) *Felbonthatatlan elem asszociáltja is felbonthatatlan.*
- c) *Prímtulajdonságú elem asszociáltja is prímtulajdonságú.*
- d) *Ha R alaptételes, akkor minden felbonthatatlan elem prímtulajdonságú.*

6. *Mutassuk meg az alaptétel felhasználása nélkül, hogy ha R főideálgyűrű, akkor nincsen benne elemek végtelen sorozata úgy, hogy mindegyik valódi osztója az előzőnek. Vezessük le ebből az alaptétel egzisztencia-állítását.*

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX