Mat-tanári gyakorlat, második évfolyam, második félév

Első alkalom (avagy variációk köbgyök kettőre)

Ha $K \le L$ egy testbővítés, akkor $|L : K|$ jelöli ennek a bővítésnek a fokát, vagyis az L-nek, mint K feletti vektortérnek a dimenzióját. A szorzástétel szerint ha $K \le L \le M$, akkor $|M : K| = |M : L| \cdot |L : K|$. A π szám *transzcendens*, azaz nem gyöke egyetlen racionális együtthatós, nem nulla polinomnak sem (ez egy ismert, de nagyon nehéz tétel).

1. *Résztestet alkotnak-e $\mathbb{C}$-ben az $a + b\sqrt[3]{2}$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$? És az $a + b\pi + c\pi^2$ alakú számok, ahol $a, b, c \in \mathbb{Q}$?*

2. *Lineárisan függetlenek-e az alábbi halmazok?*
a) $\{1, i, \sqrt{2} + 3i\}$ *a $\mathbb{Q}$ felett.*
b) $\{1, i, \sqrt{2} + 3i\}$ *az $\mathbb{R}$ felett.*
c) $\{1, \pi, 1/\pi\}$ *a $\mathbb{Q}$ felett.*
d) $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ *a $\mathbb{Q}$ felett.*

3. *Írjuk fel az $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ szám reciprokát $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ alakban, ahol a, b, c racionális számok. Mutassuk meg, hogy az $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ alakú számok, ahol $a, b, c \in \mathbb{Q}$, résztestet alkotnak $\mathbb{Q}$-ban. Hányadfokú bővítése ez $\mathbb{Q}$-nak?*

4. *Felírható-e a $\sqrt[6]{2}$ szám $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ alakban, ahol a, b, c racionális számok? Megtehető-e ugyanez $\sqrt{2}$-vel?*

Házi feladatok

5. *Legyen θ az $x^3 + 3x + 1$ polinom (egyetlen) valós gyöke. Írjuk fel a $\theta^5 + 2\theta^3$ és a $\theta/(\theta - 3)$ számokat $a + b\theta + c\theta^2$ alakban, ahol a, b, c racionális számok.*

6. *Ha K részteste $\mathbb{C}$-nek, és $d \in K$, akkor jelöljük $K(\sqrt{d})$-vel az $a + b\sqrt{d}$ alakú számok halmazát, ahol $a, b \in K$. Mutassuk meg, hogy ez részteste $\mathbb{C}$-nek, és határozzuk meg a $|K(\sqrt{d}) : K|$ értékét.*

További gyakorló feladatok

7. *Legyen K részteste $\mathbb{C}$-nek, és b, c racionális számok. Tegyük fel, hogy $\sqrt{b} \in K(\sqrt{c})$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\sqrt{b} \in K$, vagy $\sqrt{b/c} \in K$.*

8. *Legyen b négyzetmentes racionális szám (azaz két négyzetmentes egész hányadosa), és $p_1, \ldots, p_n$ prímek. Tegyük fel, hogy $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$. Bizonyítsuk be, hogy b kanonikus alakjában csak $p_1, \ldots, p_n$ szerepelhet.*

9. *Bizonyítsuk be, hogy a prímszámok négyzetgyökei lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ felett. (Egy végtelen halmaz akkor lineárisan független, ha minden véges részhalmaza az.)*