Mat-tanári szak, első évfolyam, első félév

Második zárthelyi — megoldások

1. A $\{0\}$. Ez számolással adódik, vagy abból, hogy $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$ az y-tengely jobboldala (zárt félsík), a másik három halmaz pedig ennek origó körüli elforgatottja rendre 270, 180, 90 fokkal.

2. Csak $n = 1$-re. Ha ugyanis $n \geq 2$, akkor $[n/2] \geq 1$, és ezért Csebisev tétele miatt van olyan p prímszám, melyre $[n/2] < p \leq 2[n/2]$. Ekkor $p \leq n$, de $p \geq [n/2]+1$ miatt $2p > n$, és így az első n szám között csak p lehet p-vel osztható. Ezért az első n szám legkisebb közös többszörösében p az első hatványon szerepel, vagyis nem kaphatunk köbszámot.

3. Az első kongruenciát úgy egyszerűsíthetjük 10-zel, hogy a modulust leosztjuk $(10, 42) = 2$-vel. Így $2x \equiv 7\ (21)$ adódik (1 pont). Nyilván $x = 14$ megoldás, és így $(2, 21) = 1$ miatt az első kongruencia összes megoldása a tanult tétel szerint $x \equiv 14\ (21)$ (2 pont). A kapott kongruenciarendszer megoldható, hiszen $(21, 27) = 3 \mid 14 - 8$, és a megoldás egyértelmű modulo $[21, 27] = 189$ (1 pont). A $14 + 21u$ számokat próbálgatva adódik, hogy $x = 35$ jó, tehát az összes megoldás $x \equiv 35\ (189)$ (2 pont). *Második megoldás:* lineáris diofantikus egyenletre való átírással. A második kongruenciából $x = 27u + 8$, ezt az elsőbe helyettesítve $20(27u + 8) - 70 = 42v$ adódik (3 pont). Ezt megoldva (2 pont), majd u értékét visszahelyettesítve x-re az előbbi eredményt kapjuk (1 pont).

4. A keresett rend mindig $1996/4 = 499$. Ha ugyanis $(-\varepsilon^2)^n = 1$, akkor négyzetre emelve $\varepsilon^{4n} = 1$. Mivel ε primitív 1996-odik egységgyök, innen $1996 \mid 4n$, vagyis $499 \leq n$ (3 pont). Megfordítva, $(\varepsilon^{998})^2 = 1$, tehát ε^{998} értéke 1 vagy -1, de 1 nem lehet, mert akkor ε rendje 1996-nál kisebb lenne, és ezért $\varepsilon^{998} = -1$ (2 pont). Így $(-\varepsilon^2)^{499} = -\varepsilon^{998} = 1$ (1 pont). *Második megoldás:* szögekkel is számolhatunk. Az ε szöge $k2\pi/1996$, ahol $(k, 1996) = 1$ (1 pont), és így $-\varepsilon^2$ szöge $\pi + (2k)2\pi/1996 = ((k + 499)/2) \cdot 2\pi/499$ (2 pont). Elemi számelméleti gondolatmenet mutatja, hogy $(k + 499)/2$ a 499-hez relatív prím egész szám, és így az eredmény 499 (3 pont).

5. Azokat a $0 \leq x < 90^2$ számokat keressük, melyekre $x^2 \equiv x\ (90^2)$, azaz $8100 \mid x^2 - x$. Ez ekvivalens azzal, hogy a 8100 minden prímhatvány-osztója, azaz a 2^2, 3^4, 5^2 számok mindegyike osztója $x^2 - x = x(x-1)$-nek (1 pont). Mivel x és $x - 1$ relatív prímek, ha egy prímhatvány osztója $x(x-1)$-nek, akkor osztója vagy x-nek, vagy $x - 1$-nek (2 pont). Tehát x maradéka 0 vagy 1 lehet a fenti mindhárom prímhatványra nézve. Ez összesen 2^3 lineáris kongruenciarendszert jelent x-re, egy tipikus ilyen például $x \equiv 1\ (2^2)$, $x \equiv 0\ (3^4)$, $x \equiv 1\ (5^2)$ (1 pont). A kínai maradéktétel szerint minden ilyen rendszernek van megoldása, ami egyértelmű modulo $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, azaz egy jó x értéket ad (1 pont). Mivel az $x \equiv 0\ (m)$ és az $x \equiv 1\ (m)$ kongruenciáknak $m > 1$ esetén nincs közös megoldása, mindegyik rendszer más értéket ad x-re (1 pont), ezért a megoldások száma $2^3 = 8$.

6. Nincs. Legyen a sorozat $ak + b$ ($k = 0, 1, \dots$), ahol a és b pozitív egészek. *Első megoldás.* Legyen $x > 0$ adott. A sorozatban legalább $(x - b)/a$ tag van x-ig. Ha $p^2 + q^2 \leq x$, akkor $p, q \leq \sqrt{x}$, tehát ilyen $p^2 + q^2$ összeget, ahol p és q prímek, legfeljebb $\pi(\sqrt{x})^2$-félét tudunk felírni. De előadáson beláttuk, hogy $\pi(x) \leq 5x/\log_2 x$, és így $\pi(\sqrt{x})^2 \leq (5\sqrt{x}/\log_2 \sqrt{x})^2$, ami $(x - b)/a$-val osztva nullához tart, ha $x \to \infty$. Ezért nagy x-ekre a sorozatnak lényegesen több tagja van x-ig, mint $p^2 + q^2$ alakú szám. *Második megoldás.* Mivel végtelen sok $4k - 1$ alakú prím van, választhatunk egy olyat, ami nem osztója a-nak, legyen ez r. Ekkor az $ak \equiv -b\ (r)$ kongruencia k-ra megoldható, hiszen $(a, r) = 1$, és így a megoldások száma végtelen. Ezért a sorozatnak végtelen sok olyan tagja van, ami r-rel osztható. Másrészt viszont tanultuk, hogy $r \mid p^2 + q^2$ csak úgy teljesülhet, ha $r \mid p$ és $r \mid q$. Ha p és q prímek, akkor innen $p = q = r$, azaz $p^2 + q^2 = 2r^2$. Ezért a sorozat végtelen sok r-rel osztható tagja közül legfeljebb egy (a $2r^2$) az, ami előáll két prímszám négyzetösszegeként.