Mat-tanári szak, első évfolyam, első félév

Első zárthelyi — megoldások

1. A szokásos eljárással számolva az egyenlet általános megoldása $x = -27v - 5000$ és $y = 16v + 3000$ (3 pont). A pozitív megoldások azok, amikor $v < -5000/27$ és $v > -3000/16$, azaz $v = -187$ vagy $v = -186$ (2 pont). Innen $(x, y) = (49, 8)$ illetve $(x, y) = (22, 24)$ adódik (1 pont).

2. Az ismeretlen n szám kanonikus alakját $5^\alpha p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ alakban érdemes felírni, ahol $\alpha \geq 1$ (1 pont), és így $d(n) = (\alpha + 1)(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = 35$ (1 pont). A 35 számnak két felbontása van egynél nagyobb egészek szorzatára: $35 = 5 \cdot 7$ (1 pont). Az első esetben $n = 5^{34}$, a másodikban $n = 5^4 p^6$ vagy $n = 5^6 p^4$, ahol $p \neq 5$ prímszám (2 pont). E számok közül a legkisebb a $2^6 \cdot 5^4$ (1 pont).

3. A baloldal „gyanúsan nagyobb", mint a jobboldal, hiszen $k \geq 2$ esetén $\sigma(k) \geq k + 1$, viszont $d(k) \leq k$ (2 pont). Tehát $k + 1 \leq \sigma(k) = d(k) + 1 \leq k + 1$, és így mindkét helyen egyenlőség van (1 pont). Vagyis k prímszám (1 pont), és akkor $k = d(k) = 2$ (1 pont). Mivel $k = 1$ sem megoldás, az egyetlen megoldás $k = 2$, amire az egyenlőség könnyen ellenőrizhetően tényleg teljesül (1 pont).

4. $(2m^2 + 1, 3m^2 + 4) = (2m^2 + 1, m^2 + 3) = (-5, m^2 + 3) \mid 5$, vagyis csak 1 és 5 jöhet szóba (3 pont). Például $m = 0$ esetén 1 az eredmény (1 pont). Az 5 érték nem fordulhat elő, mert az öttel való osztási maradékokat végignézve láthatjuk, hogy $2m^2 + 1$ soha nem lehet osztható 5-tel (2 pont). Tehát az eredmény csak 1 lehet.

5. Szorzattá alakítva

$$11 = x^2u^2 + 3yu^2 + 3yv^2 + x^2v^2 = (x^2 + 3y)(u^2 + v^2) \qquad \text{(2 pont).}$$

Tehát $0 \leq u^2 + v^2 \mid 11$, azaz $u^2 + v^2 = 1$ vagy 11. De a 11 nem áll elő két négyzetszám összegeként (próbálgatással, vagy azért mert $4k + 3$ alakú), és így $u^2 + v^2 = 1$, vagyis $x^2 + 3y = 11$ (2 pont). Ezt az egyenletet modulo 3 vizsgálva ellentmondást kapunk, és így az eredeti egyenletnek nincs megoldása (2 pont).

6. Ahhoz, hogy belássuk, hogy a $143 = 11 \cdot 13$ számot nem festettük pirosra, elegendő olyan c számot találni, hogy $11 \mid c$ és $13 \mid c + 1$. Ekkor ugyanis $143 \mid c(c + 1)$ biztosan teljesülni fog, de $143 \mid c$ nem teljesül (mert $13 \mid c + 1$ miatt $13 \nmid c$), és $143 \mid c + 1$ sem teljesül (mert $11 \mid c$ miatt $11 \nmid c + 1$). Ahhoz, hogy ilyen c számot találjunk, a $11x = c$ és $13y = c + 1$ egyenleteknek kell teljesülnie, vagyis a $13y - 11x = 1$ lineáris diofantikus egyenletet kell megoldanunk. Ez megoldható, mert 11 és 13 relatív prímek, és így a keresett c érték létezik. Ezzel az a) kérdést megválaszoltuk (3 pont).

Általában belátjuk, hogy a prímhatványokat befestettük, a többi számot nem. Ha n nem prímhatvány, akkor felírható $n = ab$ alakban, ahol a és b egynél nagyobb, relatív prím számok. Ekkor a fenti gondolatmenetet alkalmazva kapunk egy olyan c értéket, amelyre a feladatbeli következtetés nem teljesül (1 pont). Ha viszont $n = p^k$, ahol p prím és $k \geq 1$, akkor $p^k \mid c(c + 1)$ miatt $p \mid c$ vagy $p \mid c + 1$. Az első esetben p, és így p^k is relatív prím $c + 1$-hez, és így $p^k \mid c(c + 1)$ miatt $p^k \mid c$. Hasonlóan a második esetben $p^k \mid c + 1$. Nyilván az $n = 1$ szám is be van festve. (4 pont).