Mat-tanári szak, első évfolyam, első félév

Vizsgatematika

A vizsgára a legjobban az előadáson készített jegyzet és a gyakorlatokon szereplő feladatsorok segítségével lehet készülni (ezeket legalább az államvizsgáig érdemes megőrizni). Az anyag döntő része azonban tankönyvekben is megtalálható. Az algebra anyaghoz Fuchs: *Bevezetés az algebrába és a számelméletbe* (I–II) című, a számelmélethez Szalay: *Számelmélet*, és Turán-Gyarmati: *Számelmélet* című könyveit ajánlom. A Szalay-könyv azért hasznos, mert elmagyarázza, hogy mit miért csinálunk, mire hogyan lehet rájönni. Ez a tudás segít a vizsgakérdések megválaszolásában is. A Turán-Gyarmati jegyzetben általában a legapróbb részleteket is meg lehet találni. Az alábbi tematikában a római számok a gyakorlatok feladatsoraira utalnak. Az NB jelentése: a bizonyítást nem kell tudni.

Vizsgaidőpontok: 1997. december 19. (péntek), és 1998. január 15. (csütörtök) 9:00-től 13:00-ig a Gólyavárban. Konzultációk: 1997. december 18. (csütörtök), 9:15 és 1998. január 14. (szerda), 13:00. Ha az esetleges utóvizsgák szükségessé teszik, lesz még egy írásbeli vizsga január legvégén, ennek pontos időpontját majd az érintettekkel egyeztetjük, a második vizsga eredményhirdetésekor.

Algebra. A komplex számok (mint $a+bi$ alakú formális kifejezések, ahol $i^2=-1$). Az $a+bi$ előállítás egyértelmű, valós és képzetes rész. Összeadás, kivonás, szorzás a „szokásos” tulajdonságokkal. Konjugált, abszolút érték, tulajdonságaik. Minden nem nulla komplex számmal lehet osztani, nullosztómentesség. Négyzetgyökvonás, a másodfokú egyenlet megoldása (IX/4). A komplex számsík, komplex szám argumentuma (szöge) és trigonometrikus alakja. Szorzás és osztás trigonometrikus alakban. Egyes geometriai transzformációk kifejezése komplex számokkal. A háromszög-egyenlőtlenség (geometriai bizonyítással).

Komplex egységgyökök, trigonometrikus alakjuk, számuk. Nem nulla komplex szám rendje: különböző hatványainak a száma. A rend a legkisebb pozitív egész, melyre a számot emelve 1-et kapunk. A szám két hatványa akkor és csak akkor egyenlő, ha a kitevők különbsége a rendnek többese. Képlet hatvány rendjére (vö. VII/7). Primitív n-edik egységgyök fogalma és jellemzése trigonometrikus alakban. Gyökvonás komplex számból, az n-edik gyökök meghatározása és geometriai elhelyezkedése.

A harmadfokú egyenlet megoldása: Cardano képlete (vö. XI/8). A köbgyökvonás helyes elvégzése a Cardano képletben. A képlet az egyenlet összes gyökét megadja (X/7). A diszkrimináns felírása a gyökök segítségével (X/7), többszörös gyökök. Valós együtthatók esetén kapcsolat a diszkrimináns előjele és a valós gyökök száma között (X/7). A Casus Irreducibilis Tétele (NB). A legalább ötödfokú egyenletre már nincs gyökképlet (NB).

A binomiális együtthatók fogalma és alaptulajdonságai, a binomiális tétel.

Számelmélet. Oszthatóság az egész számok körében, elemi tulajdonságok (III/1,2 is). Asszociáltság, egységek (III/3,4 is). A maradékos osztás tétele (vö. III/6). A kitüntetett közös osztó, egyértelműsége (III/5), elemi tulajdonságai (III/7,9), meghatározása euklideszi algoritmussal (az eljárás gyorsítása: IV/10), felírhatósága $ax+by$ alakban. A lineáris diofantikus egyenlet megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele. Képlet a megoldásra (V/2). A kitüntetett közös osztó kiemelési tulajdonsága. Felbonthatatlan és prím számok (IV/12 is). Az egész számok körében minden felbonthatatlan prím (de a páros számok körében nem, III/10, IV/1). A számelmélet alaptétele. A kanonikus alak. Oszthatóság eldöntése a kanonikus alak segítségével. A kitüntetett közös többszörös (V/1). Két szám közös kanonikus alakja, képlet a kitüntetett közös osztóra és többszörösre (V/1).

Képlet a pozitív osztók számára ($d(n)$), ez multiplikatív (vö. VI/9,12), $d(n) \leq 2\sqrt{n}$ (VI/3). Relatív prím számok, elemi tulajdonságaik. Két relatív prím szám szorzatának osztói. A pozitív osztók összege ($\sigma(n)$), ez multiplikatív, képlet a kanonikus alakból. Ha n összetett, akkor $\sigma(n) \geq n + \sqrt{n} + 1$ (vö. VI/4). A páros tökéletes számok jellemzése Mersenne-prímek segítségével. Teljes hatványok felismerése a kanonikus alakból. Egész szám n-edik gyöke mikor racionális. Relatív prím számok szorzata mikor teljes hatvány. A pitagoraszi számhármasok jellemzése, alapmegoldások. A Fermat-sejtés $n = 4$ esete.

A kongruencia definíciója. A kongruencia egyenlőséghez hasonlító tulajdonságai: ekvivalencia-reláció, és a műveletekkel szemben is barátságos (vö. VII/12). Kongruenciák egyszerűsítése. Ismeretlenes kongruenciák: a lineáris kongruencia és a két egyenletből álló lineáris kongruenciarendszer visszavezetése lineáris diofantikus egyenletre. A megoldás létezésének szükséges és elégséges feltétele és egyértelműsége. A kínai maradéktétel.

Prímszámok: $\sqrt{n}$-es teszt, szita, hézagtétel (vö. VIII/7,8). Wilson tétele (vö. VIII/6). Az $x^2 \equiv -1$ (p) kongruencia megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele, ha p prím (a bizonyításban analízisből felhasználtuk, hogy ha p egy $4k-1$ alakú prím, és $p \mid a^2 + b^2$, akkor $p \mid a$ és $p \mid b$). Végtelen sok $4k-1$ alakú és végtelen sok $4k+1$ alakú prím van. Dirichlet tétele (NB, vö. VIII/9,10).

A $\pi(x)$ függvény. Erdős és Kalmár tétele: az x-nél nem nagyobb prímek szorzatának felső becslése. $\pi(x)$ felső becslése. Legendre formula ($n!$ kanonikus alakja). A $\binom{2n}{n}$ prímhatvány-osztóinak nagysága. $\pi(x)$ alsó becslése. Több prímszám van, mint négyzetszám (vö. XII/1d). Csebisev-tétele. A Nagy Prímszámtétel (NB). Az n-edik prím körülbelül $n \log n$ (XII/6, NB). Csebisev tételének élesítése (XII/2). A számtani sorozatok prímszámtétele (NB). Az n-edik $ak+b$ alakú prím nagyságrendje (XII/6, NB).

Nevezetes megoldatlan problémák a számelméletben, és a hozzájuk kapcsolódó eredmények (ehhez a részhez a Szalay-könyv nagyon hasznos, számos további érdekesség is van benne). Fermat-sejtés: triviális és alapmegoldások, redukció páratlan prím kitevőre (II/5), Faltings tétele: minden $n > 2$-re csak véges sok alapmegoldás van (NB), Wiles tétele: a sejtés igaz (NB), három negyedik hatvány összege lehet negyedik hatvány (NB). Páros és páratlan Goldbach-sejtés (vö. XII/4), ezek viszonya (II/4), Vinogradov tétele: a páratlan Goldbach-sejtés egy nagyon nagy korláttól teljesül (NB). Ikerprímek (hármasikrek, vö. I/15, XI/5). Páratlan tökéletes számok (vö. VI/13). A Fermat- és Mersenne-prímek alakja (vö. I/2,4), létezésük kérdései (VII/6c). Prímszámok két négyzetszám között.

A görög és a héber ábécé matematikában használt betűi

alfa	A	α	béta	B	β	gamma	$\mathit{\Gamma}$	γ	delta	$\mathit{\Delta}$	δ
epszilon	E	ε, ϵ	dzéta	Z	ζ	éta	H	η	théta	$\mathit{\Theta}$	θ, ϑ
ióta	I	ι	kappa	K	$\kappa, \varkappa$	lambda	$\mathit{\Lambda}$	λ	mű	M	μ
nü	N	ν	xi	$\mathit{\Xi}$	ξ	pi	$\mathit{\Pi}$	π, ϖ	ró	P	ρ, ϱ
szigma	$\mathit{\Sigma}$	σ, ς	tau	T	τ	üpszilon	$\mathit{\Upsilon}$	υ	phi (fi)	$\mathit{\Phi}$	ϕ, φ
khi	X	χ	pszi	$\mathit{\Psi}$	ψ	omega	$\mathit{\Omega}$	ω	digamma		$\digamma$
alef	$\aleph$		beth	$\beth$		daleth	$\daleth$		gimel	$\gimel$	