**Mat-tanári szak, első évfolyam, első félév**

*Válaszok a vizsgakérdésekre (1998. január 15.)*

**2.** a) Igaz, például az 1 bármelyik $n$-hez jó.

b) Nem igaz. Az $n = 1$ szám ellenpélda, hiszen bármelyik egész számot vesszük is, az relatív prím az 1-hez, ami az 1-nek többszöröse.

c) Ha $D$ és $D'$ is kitüntetett közös többszörös, akkor $D'$ közös többszörös, és mivel $D$ kitüntetett, ezért $D'$-nek, mint minden közös többszörösnek, osztója. Tehát $D \mid D'$. A $D' \mid D$ oszthatóság a $D$ és $D'$ szerepének megcserélésével adódik.

d) Ha $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor van olyan $x, y \in \mathbb{Z}$, melyre $(a, b) = ax + by$.

f) Nem, például $a = 2^1 \cdot 2^2$ és $b = 2^2 \cdot 2^1$ esetén a képletből a legnagyobb közös osztóra $2^1 \cdot 2^1$ adódik, pedig az igazság $2^3$.

**3.** b) Igaz. Tanultuk, hogy minden páros tökéletes szám $2^{p-1}q$ alakú, ahol $q = 2^p - 1 \neq 2$ is és $p$ is prím. A képlet szerint az osztók száma $((p-1)+1)(1+1) = 2p$.

c) Nem. Ha a számhármas $(xd, yd, zd)$, ahol $(x, y, z)$ már alapmegoldás, akkor tanultuk (de a megoldás képletéből is látszik), hogy $z$ páratlan szám. Mivel kettő-hatvány is, $z = 1$ lehet csak és ezért $xd$ vagy $yd$ nulla, ami nem kettő-hatvány.

d) 6, ezek: $(0,1,1)$, $(0,-1,-1)$, $(1,0,1)$, $(-1,0,-1)$, $(1,-1,0)$, $(-1,1,0)$. Azt is elfogadjuk, ha valaki a $(0,0,0)$-t is belevette (bár itt 0 a kitüntetett közös osztó).

e) Nincs, mert $3 \mid (42, 66)$ nem osztója $200 - 100$-nak (alkalmaztuk a tanult tételt).

f) A 20. Erre nyilván igaz a következtetés (hiszen $b \equiv c\ (40)$ esetén $b \equiv c\ (20)$). Ha viszont valamilyen $n$-re igaz a következtetés, akkor az $a = 20$, $b = 40$, $c = 0$ esetben a feltétel teljesül, tehát $a \equiv c\ (n)$-nek is teljesülnie kell, azaz $n \mid 20 - 0 = 20$.

**4.** a) 0 vagy 2. Valójában $p = 3$ esetén nullát kapunk, és az összes többi esetben kettőt, mert ha $p = 2^{2^n} + 1$, ahol $n \geq 1$, akkor $2^n$ páros, és így $2^{2^n}$ (hárommal nem osztható) négyzetszám, azaz 3-mal osztva 1-et ad maradékul.

b) $\pi(x)$ felső becslése és a Csebisev tétel.

c) Nem. Ez adódik a Lagrange-formulából, vagy pedig abból a Csebisev tétel bizonyításában felhasznált észrevételből, hogy $\binom{2n}{n}$ nem osztható a $2n/3$ és $n$ közötti prímekkel.

d) Tanultuk, hogy ha $(a, b) = 1$, akkor az $N$-edik $ak + b$ alakú prím $\varphi(a)N \log N$-nel osztva 1-hez tart, ha $N \to \infty$. Mivel $\varphi(14) = 6$ és $\varphi(11) = 10$, ezért a két sorozat hányadosa $6/10$-edhez tart, vagyis egy idő után az $N$-edik $11k + 1$ alakú prím lesz a nagyobb.

**5.** a) Igen, hiszen ekkor $u\varepsilon + v\varepsilon^2 = u\varepsilon^2 + v\varepsilon$. *Másik megoldás:* köbre emelve kijön, hogy a diszkrimináns nulla.

b) Egyenes. Ugyanis $H$ nyilván az $1 + i$ és a $-1 - i$ felező merőlegese, $K$ pedig ebből a valós tengelyre való tükrözéssel, majd $+90$ fokos forgatással adódik.

d) Van, azok, amelyek szöge a $2\pi$ irracionális többszöröse.

e) Igaz. Ugyanis tanultuk, hogy az $n$-edrendű elemek (azaz a primitív $n$-edik egységgyökök) hatványai pont az összes $n$-edik egységgyökök. Két egyenlő rendű elem hatványainak halmaza tehát egyenlő, és így ők egymás hatványai.

**Eredményhirdetés:** 1998. január 20. (kedd), 10:00, a szobámban (Főépület, I. emelet 19).
**A harmadik vizsga időpontmegbeszélése:** ugyanitt, ugyanazon a napon, 11:00.
*Email cím:* `ewkiss@cs.elte.hu`. *Oktatási anyagok:* `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss`.