Mat-tanári szak, első évfolyam, első félév

Válaszok a vizsgakérdésekre (1997. december 19.)

1. A két fontos tétel a $\pi(x)$ alsó becslése és a Csebisev-tétel.

2. a) Nem igaz. Ha egy $a > 0$ szám tetszőleges többszöröse $ab > 0$, akkor ez relatív prím lesz például $10ab + 1$-hez, vagy bármelyik ab-nél és tíznél nagyobb prímszámhoz.

b) Igaz. Minden egész számnak többszöröse a nulla, ami egyetlen tíznél nagyobb egészhez sem relatív prím, hiszen $(0, c) = |c|$.

c) Ha p prímszám, akkor nem nulla és nem egység. Tegyük fel, hogy $p = ab$. Ekkor $p \mid ab$, és ezért $p \mid a$ vagy $p \mid b$. Az első esetben $a \mid p$ miatt $p \sim a$, a másodikban $p \sim b$.

d) Ez a kitüntetett közös osztó kiemelési tulajdonsága: $(ac, bc) = (a, b)|c|$.

e) Nem, például $a = b = c = 2$ esetén $d = D = 2$, és $2 \cdot 2 \neq 2 \cdot 2 \cdot 2$.

3. a) Nem: $(2, 3) = 1$, $d(2) + \sigma(2) = 5$, $d(3) + \sigma(3) = 6$, $d(2 \cdot 3) + \sigma(2 \cdot 3) = 16$, de $5 \cdot 6 \neq 16$.

b) Nincs megoldása. Mivel xy és $xy + 1$ pozitív, relatív prím számok, és szorzatuk teljes nyolcadik hatvány, ezért mindkettő teljes nyolcadik hatvány. De két pozitív teljes nyolcadik hatvány különbsége mindig nagyobb, mint 1 (ez például szorzattá alakítással látható).

c) Nem: ha $2abd$ prím, akkor $2abd = 2$, így $a = b = 1$, azaz $(a^2 - b^2)d = 0$.

d) Nem oldható meg, mert $3 \mid (24, 42)$ nem osztója 100-nak. (Alkalmaztuk a lineáris kongruencia megoldhatóságáról szóló tételt.)

4. a) 0. Ha $p = 2^n - 1$ prím, akkor $n > 1$, ezért a p prím $4k - 1$ alakú, így az implikáció igaz.

c) A $k^2 + 1$ nem számtani sorozat. Az $ak + b$ számtani sorozatnál a és b rögzített számok, miközben k változik, az a nem függhet a k-tól.

d) Azt kell megszámolni, hogy egy nagy x számig több köbszám van-e, mint prímnégyzet. A köbszámok száma még a nullával együtt is csak $[\sqrt[3]{x}] + 1 \leq \sqrt[3]{x} + 1$, viszont prímnégyzetből $\pi(\sqrt{x}) \geq \sqrt{x}/4 \log_2 \sqrt{x}$ darab van. Az utóbbi az előbbihez képest nyilván végtelenhez tart, tehát prímnégyzetből jóval több van, mint köbszámból.

e) Igen, Vinogradov tétele miatt. Ha n páratlan, és elég nagy, akkor három prím elég. Ha páros, akkor $n - 3$ páratlan, ezért ha elég nagy, akkor három prím összege, vagyis n négy prím összege.

5. a) Az $uv = -p/3$ összefüggés miatt pont azok, ahol $p = 0$.

b) Zárt körlap. Ugyanis H nyilván az $1 + i$ középpontú, 2 sugarú zárt körlap, K pedig ebből -90 fokos forgatással, majd a valós tengelyre való tükrözéssel adódik.

c) Nincs, a negyedrendű elemek negyedik hatványa 1 és nem i.

d) Nem, például $o(-1) = 2$ de $(-1) \cdot (-1) = 1$ rendje 1 és nem $2 \cdot 2$.