Mat-tanári szak, első évfolyam, első félév
Vizsgadolgozat — 1998. január 15.

Minden kérdéscsoportot külön lapra írjunk, és minden lapon legyen rajta a szerző és a gyakorlatvezető neve. Aki felírja az *email címét* is, annak a javító igyekszik mihamarabb az eredményét emailben elküldeni.

Valamennyi megoldásban **indoklás** (azaz bizonyítás vagy ellenpélda) szükséges, a puszta eredményért nem jár pont. A kétpontos kérdésekre a válasz általában mindössze egy-két sor, ami sokszor csak egy hivatkozás egy tételre (ez lehet olyan is, amit az előadáson nem bizonyítottunk) vagy egy definícióra. Ne keressünk hosszú, vagy trükkös megoldásokat. A két pont a teljesen helyes és precíz válaszért jár. Aki hibázik, de a lényeget látja, az egy pontot kap, ha a lényeg hiányzik, nulla pontot.

A vizsgán az átmenés szükséges és elégséges feltétele: Lényegében helyesen (azaz apróbb hibáktól eltekintve) le kell írni az első feladatban a bizonyítást, **ÉS** meg kell szerezni a dolgozat összpontszámának felét. Jeles az összpontszám 80 százalékáért jár (ha megvan a bizonyítás is).

1. *(8 pont)*
Mondjuk ki Dirichlet tételét (2 pont) és bizonyítsuk be a $4k+1$-re vonatkozó speciális esetét (4 pont, hibánként egy pont levonás). A bizonyításban felhasznált segédtételt (a^2+b^2 prímosztóiról) pontosan ki kell mondani (2 pont), de nem kell bizonyítani.

2. *(2+2+2+2+2+2=12 pont)*

a) *Igaz-e, hogy minden pozitív n egészhez van olyan egész szám, amelyik relatív prím az n minden többszöröséhez?*

b) *Igaz-e, hogy minden pozitív n egészhez van olyan egész szám, amelyik nem relatív prím az n egyetlen többszöröséhez sem?*

c) *Mutassuk meg (csak a definícióra támaszkodva), hogy a kitüntetett közös többszörös asszociáltság erejéig egyértelmű.*

d) *Mondjuk ki precízen azt az állítást, amiből a kitüntetett közös osztó kiemelési tulajdonságát levezettük. Bizonyítani semmit sem kell.*

e) *Mondjuk ki* **precízen** *a számelmélet alaptételét. Bizonyítani nem kell.*

f) *Igaz marad-e a két szám kitüntetett közös osztójára vonatkozó képlet, ha a szereplő számok felírásában megengedjük, hogy egyazon prím hatványai (egy számon belül) többször is szerepeljenek?*

FORDÍTS!

3. *(2+2+2+2+2+2=12 pont)*

a) *Mondjuk ki precízen azt a lemmát (két relatív prím szám szorzatának osztóiról), amit a σ függvény multiplikativitásának bizonyításához használtunk fel. Bizonyítani semmit sem kell.*

b) *Igaz-e, hogy egy páros tökéletes szám pozitív osztóinak száma mindig egy prímszám kétszerese?*

c) *Lehet-e egy pitagoraszi számhármas mindhárom tagja kettő-hatvány?*

d) *Hány triviális alapmegoldása van a Fermat-sejtésnek az egész számok körében a 17 kitevőre?*

e) *Van-e olyan $x \in \mathbb{Z}$, melyre $x \equiv 100\ (42)$ és $x \equiv 200\ (66)$ is teljesül?*

f) *Melyik az a legnagyobb egész n szám, amire igaz az alábbi következtetés: ha $a \equiv b\ (20)$ és $b \equiv c\ (40)$, akkor $a \equiv c\ (n)$.*

4. *(2+2+2+2=8 pont)*

a) *Mi lehet egy Fermat-prím utolsó számjegye a hármas számrendszerben?*

b) *Soroljuk fel azokat a tételeket (de* **csak** *azokat, különben levonás jár!), melyek bizonyításában felhasználtuk az Erdős-Kalmár tételt.*

c) *Osztható-e 97-tel $\binom{278}{139}$?*

d) *Nagy N számok esetén az N-edik $14k+9$ alakú prímszám, vagy az N-edik $11k+3$ alakú prímszám a nagyobb?*

5. *(2+2+2+2+2=10 pont)*

a) *Tegyük fel, hogy amikor az $x^3+px+q=0$ harmadfokú egyenletet megoldjuk a Cardano-képlettel, akkor $u=v$ jön ki. Következik-e ebből, hogy az egyenletnek van többszörös gyöke?*

b) *Legyen $H = \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z-i-1| = |z+i+1|\}$. Milyen geometriai alakzat a $K = \{i \cdot \overline{w} \in \mathbb{C} \ :\ w \in H\}$ halmaz?*

c) *Mondjuk ki azt a tételt, ami egy nem nulla komplex szám hatványainak egyenlőségét jellemzi a szám rendje segítségével. Bizonyítani nem kell.*

d) *Van-e olyan komplex szám, aminek az abszolút értéke 1, és a rendje végtelen?*

e) *Igaz-e, hogy ha két nem nulla komplex szám rendje egyenlő és véges, akkor ők egymás hatványai?*