Mat-tanári szak, első évfolyam, első félév
Vizsgadolgozat — 1997. december 19.

Minden kérdéscsoportot külön lapra írjunk, és minden lapon legyen rajta a szerző és a gyakorlatvezető neve. Aki felírja az *email címét* is, annak a javító igyekszik mihamarabb az eredményét emailben elküldeni.

Valamennyi megoldásban **indoklás** (azaz bizonyítás vagy ellenpélda) szükséges, a puszta eredményért nem jár pont. A kétpontos kérdésekre a válasz általában mindössze egy-két sor, ami sokszor csak egy hivatkozás egy tételre (ez lehet olyan is, amit az előadáson nem bizonyítottunk) vagy egy definícióra. Ne keressünk hosszú, vagy trükkös megoldásokat. A két pont a teljesen helyes és precíz válaszért jár. Aki hibázik, de a lényeget látja, az egy pontot kap, ha a lényeg hiányzik, nulla pontot.

A vizsgán az átmenés szükséges és elégséges feltétele: Lényegében helyesen (azaz apróbb hibáktól eltekintve) le kell írni az első feladatban a bizonyítást, **ÉS** meg kell szerezni a dolgozat összpontszámának felét. Jeles az összpontszám 80 százalékáért jár (ha megvan a bizonyítás is).

1. *(14 pont)*
Mondjuk ki precízen (2 pont) és bizonyítsuk be (4 pont, hibánként egy pont levonás) a $\binom{2n}{n}$ prímhatvány-osztóiról szóló lemmát. A bizonyításban felhasznált két segédtételt (a Legendre-formulát (2 pont), illetve a $[2x]$-ről szólót (2 pont)) pontosan ki kell mondani, de nem kell bizonyítani. Mondjuk ki precízen azt a két fontos tételt is, aminek a bizonyításában ezt a lemmát alkalmaztuk (2+2 pont).

2. *(2+2+2+2+2=10 pont)*

a) *Igaz-e, hogy minden pozitív egésznek van olyan többese a pozitív egész számok között, ami egyetlen tíznél nagyobb számhoz sem relatív prím?*

b) *Igaz-e, hogy minden pozitív egésznek van olyan többese az egész számok között, ami egyetlen tíznél nagyobb számhoz sem relatív prím?*

c) *Bizonyítsuk be, hogy minden prímszám felbonthatatlan.*

d) *Mondjuk ki pontosan azt a kitüntetett közös osztóra vonatkozó azonosságot, amiből beláttuk, hogy minden felbonthatatlan szám prím. Bizonyítani semmit nem kell.*

e) *Legyenek a, b, c pozitív egészek, d a kitüntetett közös osztójuk, és D a kitüntetett közös többszörösük. Igaz-e mindig, hogy $dD = abc$?*

FORDÍTS!

3. *(2+2+2+2=8 pont)*

a) *Multiplikatív-e a* $d(n) + \sigma(n)$ *függvény?*

b) *Oldjuk meg az* $xy(xy+1) = 10^8$ *egyenletet a pozitív egészek körében.*

c) *Lehet-e egy pitagoraszi számhármas mindhárom tagja prímszám?*

d) *Megoldható-e a* $24x \equiv 100\ (42)$ *kongruencia az egész számok körében?*

4. *(2+2+2+2+2=10 pont)*

a) *Hány olyan* p *Mersenne-prím van, amire* **nem** *teljesül az alábbi következtetés:* $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(p \mid a^2 + b^2 \implies p \mid a)$*?*

b) *Mondjuk ki pontosan a számtani sorozatok prímszámtételét.*

c) *Hol a hiba az alábbi gondolatmenetben? „Belátjuk, hogy végtelen sok* p *prím van, melyre* $p-1$ *négyzetszám. Dirichlet tételét alkalmazzuk. Legyen* $a = k$ *és* $b = 1$*. Ezek relatív prímek, és ezért az* $ak+b$ *sorozatban végtelen sok prím van. De ezek mindegyike* k^2+1 *alakú.”*

d) *Miből van több, köbszámból, vagy* p^2 *alakú számból, ahol* p *prím? A válaszhoz hozzátartozik a kérdés pontos értelmezése is.*

e) *Előáll-e minden elég nagy egész szám legfeljebb hat darab prímszám összegeként?*

5. *(2+2+2+2=8 pont)*

a) *Melyek azok az* $x^3 + px + q = 0$ *harmadfokú egyenletek, melyeknél a Cardano-képletben* u *és* v *valamelyikére nulla jön ki?*

b) *Legyen* $H = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - i - 1| \leq 2\}$*. Milyen geometriai alakzat a* $K = \{w \in \mathbb{C} \ : \ i \cdot \overline{w} \in H\}$ *halmaz?*

c) *Van-e az* i *számnak olyan negyedik gyöke, aminek a rendje négy?*

d) *Igaz-e, hogy ha két nem nulla komplex szám rendje véges, akkor szorzatuk rendje egyenlő a rendjeik szorzatával?*