Az állításokat, definíciókat a legprecízebben úgy mondhatjuk ki, ha logikai formulával (azaz a matematika formális nyelvén) írjuk le őket. Ez mankóként segíthet, ha a dolog bonyolult, és már az eltévelyedés határán állunk, hasonlóan ahhoz, ahogy komplikált szöveges feladatokat is könnyebb egyenlettel megoldani, mint fejben. Ugyanakkor a formulákat emberi szavakkal is vissza kell tudjuk adni, hiszen így lehet megérteni, megjegyezni és használni az általuk kifejezett fogalmakat. *A logikailag helyes gondolkodás megtanítása a középiskolában fontosabb, mint* **bármilyen** *konkrét matematikai tananyagé.*

Az alábbi feladatok (melyek egy része Varga Tamás: *Matematikai logika kezdőknek* című könyvéből származik) segítenek ezeknek a készségeknek a gyakorlásában. Emlékeztetőül a szokásos *logikai műveletek:*

jel	kiejtés	akkor hamis, ha	név
$\neg A$	nem A	A igaz	negáció
$A \vee B$	A vagy B	mindkét tag hamis	diszjunkció
$A \wedge B$	A és B	legalább egy tag hamis	konjunkció
$A \Longrightarrow B$	ha A, akkor B	A igaz és B hamis	implikáció
$A \Longleftrightarrow B$	A akkor és csak akkor, ha B	egyik igaz, másik hamis	ekvivalencia

Használjuk még az úgynevezett *kvantorokat* is: $\exists$ (az egzisztenciális kvantor) a ‚létezik', $\forall$ (az univerzális kvantor) a ‚minden' rövidítése.

1. *Rövidítse L azt a mondatot, hogy „A ló emlős", N azt, hogy „A három negatív szám", P pedig azt, hogy „Az Anyegint Puskin írta". Döntsük el az alábbi formulákról, hogy igazak-e: $L \wedge N$, $L \vee N$, $L \Longrightarrow N$, $N \Longrightarrow L$, $L \wedge P$, $N \Longrightarrow N$, $(L \vee N) \Longrightarrow P$, $(L \wedge N) \Longleftrightarrow N$.*

2. *Jelentse $P(x)$ azt, hogy x páros, $H(x)$ pedig, hogy x hattal osztható. Az alábbi formulákat fordítsuk le emberi nyelvre, és döntsük el, igazak-e, vagy sem ($x, y, z, t \in \mathbb{Z}$).*

a) $P(4) \wedge H(12)$.

b) $\forall x(P(x) \Longrightarrow H(x))$. *Jó-e a „minden, ami páros, hattal osztható" fordítás?*

c) $\exists x(H(x) \Longrightarrow \neg P(x))$. *Jó-e a „van olyan hattal osztható, ami páratlan" fordítás?*

d) $\exists x(P(x) \wedge H(x))$. *Jó-e a „van olyan páros, ami hattal osztható" fordítás?*

e) $\exists x(P(x) \wedge H(x+1))$.

f) $\forall x(H(x) \Longrightarrow P(x))$.

g) $\forall x(\neg H(x) \Longrightarrow \neg P(x))$. *Hogyan ‚fordítható meg' a b)-beli implikáció?*

h) $\forall x((H(x) \wedge P(x+11)) \Longrightarrow (P(x+10) \wedge (2 \cdot 2 = 5))$.

i) $\forall x((H(x) \wedge P(x+11)) \Longrightarrow$ *igaz a páros Goldbach-sejtés*).

j) $\forall x \exists y P(x+y)$.

k) $\exists y \forall x P(x+y)$. *Megcserélhetők-e a $\exists$ és a $\forall$ kvantorok?*

l) $\forall y \exists x \neg P(x+y)$. *Ez az előző formula tagadása?*

m) $\forall x(P(x) \Longleftrightarrow \exists y(x = 2y))$.

n) $\forall x \forall y(3 \mid xy \implies (3 \mid x \vee 3 \mid y))$.

o) $\forall x(\forall y(x \mid y) \Longrightarrow (x = 1 \vee x = -1))$.

p) $\forall x \forall y \exists z(z \mid x \wedge z \mid y \wedge \forall t((t \mid x \wedge t \mid y) \Longrightarrow t \mid z))$.

q) $\forall x \forall y(3 = xy \implies (\forall z(x \mid z) \vee \forall z(y \mid z)))$.

r) $\exists x(4 \mid x \wedge (\forall y \forall z(x \mid yz \Longrightarrow (x \mid y \vee x \mid z))))$.

s) $\forall x((x \mid 4 \wedge (\forall y \forall z(x \mid yz \Longrightarrow (x \mid y \vee x \mid z))) \wedge (x \neq 0)) \Longrightarrow (x = 2 \vee x = -2))$.

3. *Az alábbi mondatokat írjuk fel logikai formulával.*

a) *„Vagy elhallgatsz, vagy kiküldelek.” (E: elhallgatsz, K: kiküldelek.)*

b) *„Ma vagy moziba megyünk, vagy cukrászdába.” (M: ma moziba megyünk, C: ma cukrászdába megyünk.)*

c) *„Gyűlölöm, de azért tisztelem.” (G: gyűlölöm, T: tisztelem.)*

d) *„Senki sem tehet mindenkinek kedvére.” ($K(x,y)$: x kedvére tehet y-nak.)*

e) *„Ha nincs mindenkinek párja, akkor valaki előrejön.” ($P(x,y)$: x párja y-nak, $E(x)$: x előrejön.)*

f) *„Nem illik rá minden lábra ugyanaz a cipő.” ($L(x)$: x láb, $C(x)$: x cipő, $R(x,y)$: x ráillik y-ra.) Jó-e a $\neg\exists x\forall y[(C(x)\wedge L(y)) \implies R(x,y)]$ megoldás?*

g) *„Ha valaki Klárit csókolja meg, Klári jókedvre derül; de ha valaki Sárit csókolja meg, kap tőle egy pofont.” ($C(x,y)$: x megcsókolja y-t, $J(x)$: x jókedvre derül, $P(x,y)$: x pofont kap y-tól, k: Klári, s: Sári.) Jó-e az alábbi formulák valamelyike:*

(1) $(\exists x C(x,k) \implies J(k)) \wedge (\exists x C(x,s) \implies P(x,s))$,

(2) $(\exists x C(x,k) \implies J(k)) \wedge \exists x(C(x,s) \implies P(x,s))$,

(3) $(\exists x C(x,k) \implies J(k)) \wedge \exists x(C(x,s) \wedge P(x,s))$.

h) *„Kiki a maga szerencséjének kovácsa.” ($K(x,y)$: x az y szerencséjének kovácsa.)*

i) *„Bolonddá lehet tenni mindig némelyeket, és néha mindenkit, de nem lehet mindig mindenkit bolonddá tenni.” ($B(t,x)$: bolonddá lehet tenni a t időpontban x-et. Hogy egyszerűbb formulát kapjunk, tegyük fel, hogy t mindig időpontot, x embert jelöl.)*

j) *„Senki senkinek nem hiszi el a szavát.” ($E(x,y)$: x elhiszi y szavát.) Helyes-e a $\neg\exists x\neg\exists y E(x,y)$ megoldás?*

A most következő feladatokban a jelöléseket is meg kell találni.

k) *„Okos embernek néha változik a véleménye, ostobának soha.”*

l) *„Aki mindenkinek tetszeni akar, az senkinek sem tetszik.”*

m) *„Akinek birtoka van, az a birtokáé.”*

n) *„Nem minden szarka farka tarka, csak a tarka farkú szarka farka tarka.”*

4. *Írjuk fel formulával, az összeadás, kivonás, szorzás és az oszthatóság jelét használva az egység, felbonthatatlan, és prím fogalmát (a* **2.** *feladat segít). A vizsgára készüléshez érdemes az* **összes** *definíció és tétel állítását formulával felírni.*

5. *Mutassuk meg, hogy az alábbi azonosságok igazak* **tetszőleges** *A, B, C, $F(x)$ esetén. Adjunk rájuk olyan köznapi példamondatpárt, amelyről „érezzük”, hogy ugyanazt jelentik.*

a) $A\wedge B \equiv B\wedge A$ *és* $A\vee B \equiv B\vee A$ *(kommutativitás).*

b) $A\wedge A \equiv A$ *és* $A\vee A \equiv A$ *(idempotencia).*

c) $(A\wedge B)\wedge C \equiv A\wedge(B\wedge C)$ *és* $(A\vee B)\vee C \equiv A\vee(B\vee C)$ *(asszociativitás).*

d) $(A\wedge B)\vee C \equiv (A\vee C)\wedge(B\vee C)$ *és* $(A\vee B)\wedge C \equiv (A\wedge C)\vee(B\wedge C)$ *(disztributivitás).*

e) $\neg(A\wedge B) \equiv \neg A\vee\neg B$ *és* $\neg(A\vee B) \equiv \neg A\wedge\neg B$ *(De Morgan szabályok).*

f) $\neg\neg A \equiv A$ *és* $\neg A\vee B \equiv A \implies B$.

g) $A \implies B \equiv \neg B \implies \neg A$ *(kontrapozíció).*

h) $A \iff B \equiv (A \implies B)\wedge(B \implies A)$ *és* $A \implies (B \implies C) \equiv (A\wedge B) \implies C$.

i) $\neg\exists x F(x) \equiv \forall x\neg F(x)$ *és* $\neg\forall x F(x) \equiv \exists x\neg F(x)$.

j) $\forall x(F(x) \implies A) \equiv \exists x F(x) \implies A$ *és* $\exists x(F(x) \implies A) \equiv \forall x F(x) \implies A$.

k) $\forall x(A \implies F(x)) \equiv A \implies \forall x F(x)$ *és* $\exists x(A \implies F(x)) \equiv A \implies \exists x F(x)$.