Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév
Kilencedik alkalom

A komplex számok az $a+bi$ alakú formális kifejezések, ahol a és b valós számok. Számolni is úgy kell velük, mint formális kifejezésekkel, de annak felhasználásával, hogy $i^2=-1$. A $z=a+bi$ komplex szám *valós része* $\mathrm{Re}(z)=a$, *képzetes része* $\mathrm{Im}(z)=b$ (tehát a képzetes rész nem bi, hanem valós szám). Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha valós és képzetes részeik egyenlőek. A $z=a+bi$ szám *konjugáltja* $\overline{z}=a-bi$, *abszolút értéke* $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$. Érvényesek az alábbi azonosságok:

$$\overline{z\pm w}=\overline{z}\pm\overline{w}\,,\qquad \overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}\,,\qquad \overline{(z/w)}=\overline{z}/\overline{w}$$

(azaz a konjugálás összeg-, különbség-, szorzat- és hányadostartó), továbbá

$$|z\cdot w|=|z|\cdot|w|\,,\qquad |z/w|=|z|/|w|\,,\qquad 1/z=\overline{z}/|z|^2\,.$$

Az osztást tehát úgy végezhetjük el, hogy a törtet a nevező konjugáltjával bővítjük.

A komplex számokat a síkon ábrázolhatjuk, az $a+bi$-nek az (a,b) pontot, vagy az origóból az (a,b) pontba mutató vektort feleltetve meg. Ekkor az x-tengely éppen a valós számegyenes, és a komplex számok összeadása éppen a vektorösszeadás. A nemnegatív valós számok által alkotott félegyenestől a $z=a+bi\neq 0$-nak megfelelő vektorig pozitív irányba terjedő irányított szöget a z *szögének* nevezzük, ennek jele $\arg(z)$. Ez a szög tehát nemnegatív, és kisebb mint 2π. Pitagorasz tétele miatt z abszolút értéke éppen a neki megfelelő vektor hossza, és így, ha z szöge α, és abszolút értéke r, akkor

$$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\,.$$

Ezt a felírást a z *trigonometrikus alakjának* nevezzük. Jelentősége a következő összefüggésekben rejlik (amelyek a sin és cos függvények addíciós képletének felhasználásával igazolhatóak). Ha $w=s(\cos\beta+i\sin\beta)$, akkor

$$zw=rs(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta))\,,\qquad z/w=(r/s)(\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta))\,.$$

Tehát komplex számok szorzásnál a szögek összeadódnak, az abszolút értékek (azaz a hosszak) összeszorzódnak.

1. *Végezzük el az alábbi műveleteket:*

$$(1+i)(3-2i)\,,\quad 1/i\,,\quad (1+i)/(3-2i)\,,\quad |\overline{(4+i)}/(4+i)|\,.$$

2. *Rajzoljuk le a síkon az alábbi halmazokat.*
a) $\{z\in\mathbb{C}:|z-i-1|\leq 3\}$.
b) $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z+i)>1\}$.
c) $\{z\in\mathbb{C}:z+\overline{z}=-1\}$.

3. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.*
a) $x^2+2x+2=0$.
b) $x^2+2ix-1=0$.

4. *Határozzuk meg azokat a* $c+di$ *számokat, melyek négyzete* $20i-21$. *Oldjuk meg az* $x^2+(i-2)x+(6-6i)=0$ *egyenletet.*

FOLYT. KÖV.

5. *Hol a hiba a következő levezetésben?*

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\cdot i=-1\,.$$

6. *Írjuk fel az alábbi komplex számokat trigonometrikus alakban:*

$$1+i\,,\quad 1-i\,,\quad \sqrt{3}+i\,,\quad -1-\sqrt{3}i\,.$$

7. *Határozzuk meg* $(\sqrt{3}+i)^{1997}$ *értékét.*

8. *Legyenek* z *és* w *különböző komplex számok.*

a) *Írjuk fel az őket összekötő szakasz felezőpontját.*

b) *Írjuk fel annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve a középpontját, melyeknek az adott két szám két csúcsa.*

9. *Egy háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket rajzolunk. Mutassuk meg, hogy ezek középpontjai is szabályos háromszöget alkotnak.*

Gyakorló feladatok

10. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.*

a) $x^2-(2+i)x+7i-1=0$.

b) $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$.

c) $x=(3+2i)\overline{x}$.

d) $x=2\cdot\mathrm{Re}(x)$.

11. *Rajzoljuk le az alábbi halmazokat.*

$$\{z\in\mathbb{C}:|z|=iz\}\,,\qquad \{z\in\mathbb{C}:|z-i-1|=|z+2|\}\,,\qquad \{z\in\mathbb{C}:1/z=\overline{z}\}$$

12. *Számítsuk ki* $(1-i)^{1997}$ *és* $(\cos 30^\circ+i\sin 60^\circ)^{1111}$ *értékét.*

13. *Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait. Mutassuk meg, hogy az így kapott két szakasz merőleges, és egyenlő hosszú.*

14. *Mutassuk meg, hogy a* z_1, z_2, z_3, z_4 *páronként különböző komplex számok akkor és csak akkor vannak egy körön vagy egyenesen, ha kettősviszonyuk, azaz a*

$$(z_1\,z_2\,z_3\,z_4)=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\bigg/\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}$$

kifejezés valós szám.

15. *Igazoljuk komplex számok felhasználásával Ptolemaiosz tételét: ha egy négyszög oldalainak hossza rendre* a, b, c, d, *átlóinak hossza pedig* e *és* f, *akkor* $ac+bd\geq ef$, *és egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha a négyszög húrnégyszög.*

16*. *Legyen* $z=\cos(\alpha/2)+i\sin(\alpha/2)$. *A* $z^2+z^4+\cdots+z^{2n}$ *kifejezést kétféleképpen kiszámítva igazoljuk, hogy*

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\frac{\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\,.$$

Keressünk hasonló zárt képletet $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha$*-ra is.*