Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév

Nyolcadik alkalom

Dirichlet tétele: ha a és b relatív prím egész számok, akkor az $ak + b$ számtani sorozatban ($k \in \mathbb{Z}$) végtelen sok prímszám van. *Csebisev tétele:* minden pozitív egész szám és a kétszerese között van prímszám. *Wilson tétele:* ha $p > 0$ prím, akkor $(p-1)! \equiv -1\ (p)$.

1. *Igazoljuk a Dirichlet-tétel felhasználása nélkül, hogy végtelen sok $6k - 1$, illetve* **nem** *$8k + 1$ alakú prím van.*

2. *Van-e akármilyen nagy, a tizes számrendszerben eggyel kezdődő prím?*

3. *Van-e olyan prím, melyet a tizes számrendszerben felírva a számjegyek összege legalább egymillió?*

4. *Bizonyítsuk be, hogy a Fermat- és a Mersenne prímeken kívül még végtelen sok prímszám van.*

5. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges p prímre $(2p-1)! \equiv p\ (p^2)$.*

6. *Tegyük fel, hogy $n > 0$ egész, de nem prím. Mivel lesz kongruens $(n-1)!$ modulo n?*

7*. *Bizonyítsuk be, hogy vannak „izolált" prímek, azaz minden N pozitív egészhez létezik olyan p prím, hogy $p - N$ és $p + N$ között nincs más prím, csak p. Logikailag hogyan viszonylik ez az állítás a hézagtételhez?*

Gyakorló feladatok

8. *Csak a hézagtételre, és nem a bizonyítására való hivatkozással mutassuk meg, hogy minden N pozitív egészhez végtelen sok olyan szomszédos prímpár van, amelyek közötti távolság nagyobb, mint N.*

9. *Tegyük fel, hogy beláttuk a következő állítást: ha a és b tetszőleges relatív prím egész számok, akkor az $ak + b$ számtani sorozatban ($k \in \mathbb{Z}$)* **van** *prímszám. Vezessük le ebből az állításból Dirichlet tételét.*

10. *Tegyük fel, hogy az a és b egész számok nem relatív prímek. Hány prímszám lehet legfeljebb az $ak + b$ sorozatban, ahol $k \in \mathbb{Z}$?*

11. *Van-e olyan prím, mely tizes számrendszerbeli alakjában legalább száz nulla szerepel?*

12. *Igaz-e a következő állítás: egy tizes számrendszerben felírt pozitív számnak mindig meg lehet egy alkalmasan választott jegyét változtatni úgy, hogy prímet kapjunk?*

13. *Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egészet, melyre n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ mindegyike prímhatvány.*

14. *Van-e végtelen sok $8k - 1$ alakú szám, ami hat különböző prím szorzata?*

15. *Bizonyítsuk be, hogy létezik végtelen sok természetes szám, mely nem írható fel egy négyzetszám és egy pozitív prímszám összegeként.*

16*. *Az úttörőtábor gyülekező terét m fa állja körbe, mindegyiken egy mókus ül. A mókusok össze akarnak gyűlni egy fán, de csak úgy változtathatják a helyüket, hogy mindig egyszerre két mókus ugrik át a szomszédos fára, ellenkező körüljárási irányban. Milyen m esetén tudnak összegyűlni a mókusok?*