Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév

Hetedik alkalom

1. *Racionálisak-e a* $\sqrt[6]{72}$, $2+\sqrt[3]{9}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *számok?*

2. *Mutassuk meg, hogy ha* $n > 2$ *egész, akkor tagja egy pitagoraszi számhármasnak. Mely* n *pozitív egészek lehetnek egy alapmegoldás tagjai?*

3*. *Van-e olyan derékszögű háromszög, melynek oldalai egészek, és területe négyzetszám?*

4. *Mutassuk meg, hogy ha* $x^3+y^3=z^3$, *ahol* $x,y,z\in\mathbb{Z}$, *akkor e három szám valamelyike osztható héttel (persze nem szabad felhasználni, hogy csak triviális megoldás van).*

5. *Mutassuk meg, hogy a Fermat-sejtésnek nincs megoldása a pozitív prímek körében.*

Az alábbi feladatokat, és a VI/7. feladatot **kongruenciákkal** oldjuk meg.

6. *Igazoljuk az alábbi oszthatóságokat tetszőleges* $n\ge 0$ *egészre.*

a) $7 \mid 2^{n+2}+3^{2n+1}$.

b) $13 \mid 2^{70}+3^{70}$.

c) $641 \mid 2^{2^5}+1$ *(Euler). Használjuk fel, hogy* $2^7\cdot 5 = 640 \equiv -1\ (641)$ *és* $2^4 \equiv -5^4\ (641)$.

d) $19 \mid 2^{2^{6n+2}}+3$. *(Mi lesz* 2^{2^6} *maradéka modulo 19?)*

e) $a-b \mid a^n-b^n$ $(a,b\in\mathbb{Z})$.

7. *Egy bolha ugrál egy szabályos* n*-szög csúcsain úgy, hogy mindig* k *élnyit halad előre. Hányat kell ugrania, hogy visszakerüljön a kiindulópontba? Hány kört tesz meg ezalatt?*

8. *Az egészkor elindított szalagról 14 percenként jön le egy tévé. Mutathat-e az óránk egy ilyen pillanatban egész óra 27 percet? És egész óra 2 percet? Mikor fordul ez először elő?*

9. *Adjuk meg az összes olyan ötszáznál kisebb pozitív egészet, mely a tizes számrendszerben kilencre, a tizenhármas számrendszerben egyre végződik.*

10. *A 210 alapú számrendszerben hány olyan egyjegyű szám van, melynek négyzete egyre végződik? Általánosítsuk a feladatot!*

11. *Egy kisbaba ötóránként eszik (éjjel-nappal), először hétfő reggel nyolckor.*

a) Melyek azok a napok az első két héten (vasárnapig bezárólag), amikor délben eszik?

b) Melyik az első olyan hét, amikor a menetrend az első hetivel azonos?

12. *Legyen* $a,b,c,d,n,m\in\mathbb{Z}$, $m,n>0$, $n\mid m$. *Mely állítások igazak az alábbiak közül?*

a) $a\equiv b\ (m) \implies a\equiv b\ (n)$. *Igaz-e a megfordítás?*

b) $a\equiv b\ (m)$ *és* $c\not\equiv d\ (m) \implies a+c\not\equiv b+d\ (m)$.

c) $a\equiv b\ (m)$ *és* $c\not\equiv d\ (m) \implies ac\not\equiv bd\ (m)$.

d) $a\not\equiv b\ (m)$ *és* $c\not\equiv d\ (m) \implies a+c\not\equiv b+d\ (m)$.

e) A $\not\equiv\ (m)$ *reláció tranzitív.*

13. *Legyen* n *pozitív egész. Mely* k *értékekre szabad „*k*-adik gyököt vonni" az* $a^k\equiv b^k\ (2^n)$ *kongruenciából tetszőleges* **páratlan** a, b *esetén?*

14*. *Egy gépen a legnagyobb ábrázolható egész szám értéke* $2^{15}-1=32767$. *A kínai maradéktétel felhasználásával tervezzünk olyan programot, amely tetszőleges két, legfeljebb hatjegyű, tizes számrendszerbeli számot ábrázolni, összeadni és összeszorozni képes.*