Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév
Hatodik alkalom

1. *Melyik az a legkisebb $n > 0$ egész szám, melyre $d(n)$ értéke a) 29; b) 30; c) 32?*

2. *Egy sah börtönének 400 cellájában egy-egy rab sínylődik. A zárak egy elfordításra nyílnak, még egy elfordításra csukódnak. Eredetileg minden ajtó zárva van. A sah elhatározza, hogy nagylelkű lesz, és megparancsolja az egyik őrnek, hogy fordítson egyet valamennyi záron. Közben azonban meggondolja magát, és utánaküld egy másik őrt, hogy minden második záron fordítson egyet. A harmadik őr minden harmadik záron változtat, stb., végül a négyszázadik őr a négyszázadik cella zárjának állását módosítja. Azok szabadulnak ki, akiknek most nyitva áll az ajtaja. Hány rabot bocsátott szabadon a sah?*

3. *Legyen n pozitív egész.*
  a) *Mely n-ekre lesz $d(n) = n - 2$?*
  b) *Igazoljuk, hogy $d(n) \leq (n/2) + 1$.*
  c) *Igazoljuk, hogy $d(n) \leq 2\sqrt{n}$.*

4. *Adjuk meg a $\sigma(n) = n + k$ egyenlet összes megoldását abban az esetben, ha $k = 5$, 14, illetve 1. Mely pozitív k értékekre van végtelen sok megoldása ennek az egyenletnek?*

5. *Oldjuk meg a $\sigma(2n) = 2\sigma(n)$ illetve a $\sigma(2n) = 3\sigma(n)$ egyenleteket.*

6.** *Mely n pozitív egészekre lesz $\sigma(n)$ kettő-hatvány?*

Gyakorló feladatok

7. *Igazoljuk az alábbi oszthatóságokat minden pozitív egész n-re.*
  a) $7 \mid 4^n \cdot 3^{2n} + 6^{2n+1}$.
  b) $17 \mid 5^{2n+1}2^{4n} + 3^{4n+1}53^{n+2}$.

8*. *Mely n egészekre lesz az $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ összeg egész szám?*

9. *Működik-e a $d(n)$-re adott képlet, ha n kanonikus alakjában nulla kitevőjű prím is előfordul? És ha a prímek között egyenlők is vannak?*

10. *Adjuk meg az összes olyan pozitív n egészet, melyre $d(2n) = d(3n)$.*

11. *Mely n pozitív egészekre lesz $\sigma(n)$ páratlan?*

12*. *Legyenek a és b pozitív egészek. Határozzuk meg $d(ab)$ és $d(a)d(b)$ nagyságviszonyát (lehet-e az első nagyobb, mint a második, lehet-e fordítva). Mely a, b értékekre egyenlő ez a két szám? Multiplikatív-e a $d(n)$ függvény?*

13. *Egy pozitív egész számot* hiányosnak *nevezünk, ha valódi osztóinak összege nála kisebb, és* bővelkedőnek, *ha ez az összeg nála nagyobb.*
  a) *Bizonyítsuk be, hogy minden prímhatvány hiányos.*
  b) *Van-e páratlan bővelkedő szám?*
  c) *Bizonyítsuk be, hogy egy bővelkedő szám minden többese bővelkedő.*

14. *Egy n szám pozitív osztóinak összegét elosztjuk ugyanezen osztók reciprokainak összegével. Mi lesz az eredmény?*