Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév
Ötödik alkalom

Legyen $a, b \in \mathbb{Z}$. Azt mondjuk, hogy $c \in \mathbb{Z}$ *kitüntetett közös többszöröse* az a és b számoknak, ha közös többszörös (azaz $a \mid c$, $b \mid c$), és minden közös többesnek osztója (azaz ha $d \in \mathbb{Z}$ és $a \mid d$, $b \mid d$, akkor $c \mid d$). A k. k. t. is asszociáltság erejéig egyértelmű, jelölje $[a, b]$ a lehetséges értékek közül a nemnegatívat.

1. *Legyen az a és b nem nulla egészek közös kanonikus alakja $a = ep_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ és $b = fp_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, ahol e és f egységek, $p_1, \dots, p_k$ felbonthatatlan egészek, és α_i, β_i nemnegatív egészek ($1 \le j \le k$).*

a) *Mutassuk meg, hogy d akkor és csak akkor kitüntetett közös osztója az a és b számoknak, ha*
$$d \sim p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)} .$$

b) *Mutassuk meg, hogy az előző állításbeli képlet, ha* min *helyett minden kitevőbe* max*-ot írunk, a k. k. t.-t adja meg, és így a kitüntetett közös többes létezik. Igazoljuk, hogy a k. k. t. asszociáltság erejéig egyértelmű.*

c) *Igazoljuk, hogy $(a, b)[a, b] = |ab|$.*

d) *Mutassuk meg, hogy ha $a \mid c$, $b \mid c$ és a, b relatív prímek, akkor $ab \mid c$.*

e) *Általánosítsuk két elem kitüntetett közös osztójának és többesének fogalmát több elemre. Mutassuk meg, hogy minden számhalmaznak van k. k. o.-ja, és minden véges számhalmaznak van k. k. t.-je.*

f) *Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy az $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ egyenlet megoldható legyen ($a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}$, az $x_1, \dots, x_n$ értékét is $\mathbb{Z}$-ben keressük).*

2. *Tegyük fel, hogy $a, b, c \in \mathbb{Z}$, és az $ax + by = c$ egyenletnek van egy (x_0, y_0) egész megoldása. Mutassuk meg, hogy ekkor az egyenlet összes megoldása*
$$x = x_0 + r\frac{b}{(a,b)}, \qquad y = y_0 - r\frac{a}{(a,b)} \qquad (r \in \mathbb{Z}) .$$

3. *Tudjuk, hogy a $\mathbb{Z}$-beli p prím negyedik hatványa osztja $c^2 - 25$-öt. Mely p-kre következik ebből, hogy p^4 osztója $c - 5$-nek vagy $c + 5$-nek?*

4. *Mutassuk meg, hogy minden pozitív egész szám egyértelműen felbontható egy négyzetszám és egy négyzetmentes szám szorzatára (egy szám négyzetmentes, ha nem osztható 1-nél nagyobb négyzetszámmal.*

5. *Mely k egész számokra igaz, hogy*

a) $(\forall a \in \mathbb{Z})(k \mid a^2 \implies k \mid a)$?

b) $(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall b \in \mathbb{Z})\,((k \mid ab \text{ és } k \nmid a) \implies (\exists n \in \mathbb{Z})(n \ge 1 \text{ és } k \mid b^n))$.

6. *Igazoljuk, hogy semmilyen n egészre nem egyszerűsíthető a $(8n + 5)/(5n + 3)$ tört.*

7*. *Az 1-től $2n$-ig terjedő számok közül ki akarunk választani néhányat úgy, hogy egyik se ossza egyik másikat se. Mutassuk meg, hogy n szám kiválasztható így, de $n + 1$ már nem. (Ötlet: Minden 1 és n közötti számot meg lehet szorozni egy kettő-hatvánnyal úgy, hogy $n + 1$ és $2n$ közé essen.)*