Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév

Negyedik alkalom

1. *A múltkori 10. feladatban vizsgált páros számok körében keressük meg a felbonthatatlanokat és a prímeket (az ott definiált oszthatóságra nézve). Igaz-e a számelmélet alaptételének a felbontás létezéséről szóló állítása? És a felbontás egyértelműségéről szóló állítás?*

2. *Rendelkezésünkre áll egy 17 literes és egy 21 literes kanna. Ezeket akárhányszor megtölthetjük a csapnál, és a tartalmukat (teljes egészében) beönthetjük egy tartályba. Kimérhető-e ezzel a módszerrel 50 liter, illetve 400 liter víz? Ha azt is megengedjük, hogy a tartályból kimerjünk vizet (21 illetve 17 literes egységenként), betölthető-e 50 liter víz?*

3. *Igazoljuk, hogy ha a és b egészek, akkor $(a, b) = (11a + 5b, 9a + 4b)$.*

4. *Legyen n egész szám. Határozzuk meg $(n^2 + 1, 2n^2 + 9)$ lehetséges értékeit.*

5*. *Az asztalon sorba raktunk kétfilléreseket. Ketten a következő játékot játsszák: felváltva kiválasztanak egy, a fej oldalával felfelé álló érmét, és ezt, valamint az összes tőle jobbra lévő pénzdarabot az ellenkező oldalára fordítják. Az veszít, aki már nem tud lépni. Bizonyítsuk be, hogy a játék véges sok lépésben véget ér. A kezdeti állapotról hogyan dönthető el, melyik játékosnak van nyerő stratégiája?*

Gyakorló feladatok

6. *Határozzuk meg a 9991 és 3589 számok legnagyobb közös osztóját. Keressük meg az összes olyan (x, y) egész számpárokat, melyre $9991x + 3589y = 1649$.*

7. *Egy királyfi hét- és tízfejű sárkányokkal csatázott, és levágta mind a 116 fejüket. Hány sárkányt ölt meg?*

8. *Legyenek a, b pozitív egészek, $(a, b) = 7$. Milyen értékeket vehet fel $(a + b, a - b)$?*

9. *Határozzuk meg $2^{2^k} + 1$ és $2^{2^m} + 1$ legnagyobb közös osztóját, ha $k \neq m$ nemnegatív egészek. Mutassuk meg az eredmény felhasználásával, hogy végtelen sok prímszám van.*

10. *Igazoljuk, hogy ha a és b nem nulla egészek, akkor az euklideszi algoritmust a legkisebb abszolút értékű maradékokkal végezve az legfeljebb $\log_2 |b|$ lépésben véget ér.*

11. *Igaz-e az alábbi állítás az egész számok között:* „minden felbonthatatlan szám felbontható felbonthatatlan számok szorzatára”. *Nem tartalmazza-e ez a mondat azt a képtelenséget, hogy ami felbonthatatlan, az felbontható? Mit jelentenek a „felbonthatatlan” és „felbontható” szavak ebben a mondatban?*

12. *Mutassuk meg az egész számok körében az alábbi állításokat.*

a) Egységek osztói, szorzata és hányadosa is egység.
b) Ha $a \neq 0$ és $a = bc$, akkor b akkor és csak akkor egység, ha c asszociáltja a-nak. *Szükséges-e ebben az állításban az $a \neq 0$ kikötés?*
c) *Ha $a, b, r \in R$ és $a \sim b$, akkor $ar \sim br$.*
d) Felbonthatatlan szám asszociáltja is felbonthatatlan.
e) *Prímtulajdonságú szám asszociáltja is prímtulajdonságú.*
f) Minden prímtulajdonságú szám felbonthatatlan.
g) *Ha igaz az alaptétel, akkor minden felbonthatatlan szám prímtulajdonságú.*