Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév

Harmadik alkalom

1. *Bizonyítsuk be, hogy az oszthatóság az egész számok körében tranzitív.*

2. *Milyen b egészekre teljesül, hogy $0 \mid b$? És az, hogy $b \mid 0$? Nem okoz-e itt bajt, hogy nullával nem szabad osztani?*

3. *Mutassuk meg, hogy egy egész szám akkor és csak akkor egység, ha minden egész számnak osztója.*

4. *Igazoljuk, hogy ha $a \sim a'$ és $b \sim b'$, akkor $a \mid b \iff a' \mid b'$. Hogyan fogalmazhatjuk meg szavakkal ezt az állítást?*

5. *Igazoljuk, hogy ha d egy kitüntetett közös osztója az a és b számoknak, akkor a és b kitüntetett közös osztói éppen d asszociáltjai.*

6. *A maradékos osztás tételében igaz marad-e a q és r létezéséről, illetve egyértelműségéről szóló állítás, ha a $0 \le r < |b|$ feltételt a következővel helyettesítjük:*

a) $0 \le r < b\,.$

b) $0 \le |r| < |b|\,.$

c) $|r| \le |b|/2\,.$

7. *Határozzuk meg $(b, 0)$ értékét ($b \in \mathbb{Z}$).*

8. *Végezzük el az euklideszi algoritmust a 220 és 184 számokra, majd a kapott eredményt a tanult visszahelyettesítési eljárással állítsuk elő $220x + 184y$ alakban (ahol $x, y \in \mathbb{Z}$).*

9. *Bizonyítsuk be az $(a, b) = (a - kb, b)$ azonosságot ($a, b, k \in \mathbb{Z}$).*

10. *Legyen P a páros egész számok halmaza. Értelmezzük a P-beli oszthatóságot így: $a \mid_P b$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $c \in P$, hogy $ac = b$. Így értelmessé válik P-ben az asszociált, az egység, és a kitüntetett közös osztó fogalma is (hiszen ezeket az oszthatóság nyelvén definiáltuk).*

a) Igaz-e, hogy $\mid_P$ reflexív? És hogy tranzitív?

b) Határozzuk meg az egységeket P-ben. Mik lesznek a $b \in P$ asszociáltjai?

c) Elvégezhető-e (P-ben maradva) a $2 : 2$ maradékos osztás?

d) Létezik-e a 4 és 6 számok P-beli kitüntetett közös osztója?

Ismétlő feladatok

11. *Mutassuk meg, hogy egyetlen $8k + 7$ alakú szám sem állítható elő három négyzetszám összegeként. Igaz-e, hogy a többi pozitív egész előállítható így?*

12. *Mi 3^{1997} utolsó jegye a tizes számrendszerben? Mi $1996^{1997^{1998}}$ utolsó jegye az 1997 alapú számrendszerben?*