Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév

Tizenkettedik alkalom: megoldási ötletek és eredmények

1. a): $\pi_{12,5}(100) = 6$ (a szóbanforgó prímek 5, 17, 29, 41, 53, 89). b): $\pi_{12,3}(234971) = 1$ (mert $3 \mid 12k + 3$, de hárommal osztható pozitív prím csak a 3 lehet). c): $\pi_{12,5}(54807) - \pi_{12,125}(54807) = 0$ (ugyanazokat a prímeket számoljuk, mert $12k+5 = 12(k-10)+125$). d):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi_{12,5}(n)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi_{12,5}(n)}{n/\log n} \cdot \frac{n/\log n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n/\log n}{\varphi(12)\sqrt{n}} = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}}{\log n} = \infty\,,$$

ezért négyzetszámból van kevesebb. e): $\lim_{n\to\infty} \pi_{30,7}(n)/\pi_{11,5}(n) = \varphi(11)/\varphi(30) = 10/8$.

1/f, 2. A prímszámtétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi_{a,b}((1+\varepsilon)n)}{\pi_{a,b}(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\varepsilon)\log n}{\log((1+\varepsilon)n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\varepsilon}{1 + (\log(1+\varepsilon)/\log n)} = 1 + \varepsilon > 1\,.$$

Ezért van olyan N, hogy $n \ge N$ esetén $\pi_{a,b}((1+\varepsilon)n)/\pi_{a,b}(n) > 1$.

3. Már olyan számhármasból is legalább $cN^{3/2}$ van, amelyre $1 \le x, y, z \le \sqrt{N/3}$ (még akkor is, ha x, y, z sorrendjét nem különböztetjük meg, mert ez a legrosszabb esetben is csak hatodol). Tehát az 1 és N közötti számok *átlagosan* legalább $cN^{3/2}/N$-féleképen állnak elő három négyzetszám összegeként, és így lesz köztük olyan, ami legalább ennyiféleképpen áll elő. De $c\sqrt{N} \to \infty$, és ezért előbb-utóbb túlhaladja az egymilliót.

4. Azt kell belátni, hogy ha $(a, b) = 1$, $(c, d) = 1$ és K egészek, akkor van olyan n, ami legalább K-féleképpen áll elő egy $ak + b$ és egy $ck + d$ alakú prím összegeként. Tetszőleges N esetén tekintsük az $N/2$-nél nem nagyobb $ak+b$ illetve $ck+d$ alakú prímeket, és az előbbieket az utóbbiakkal adjuk össze az összes lehetséges módon. Ekkor $\pi_{a,b}(N/2)\pi_{c,d}(N/2)$ darab összeget kapunk, amelyek mindegyike legfeljebb N lehet. Tehát van olyan $1 \le n \le N$, amit legalább $\pi_{a,b}(N/2)\pi_{c,d}(N/2)/N$-féleképpen megkapunk. A prímszámtétel miatt ez végtelenhez tart, ha $N \to \infty$ (mert $N/\log^2 N \to \infty$). Tehát N választható úgy, hogy $\pi_{a,b}(N/2)\pi_{c,d}(N/2)/N \ge K$ legyen, és ezzel az állítást beláttuk. A megoldást nem rontja el, ha a $p+q = q+p = n$ típusú megoldásokat nem különböztetjük meg, mert ez legrosszabb esetben is csak felére csökkenti az előállítások számát.

5. $q_8 = 47$. Az a)-ban az első állítás abból következik, ahogy az előadáson beláttuk, hogy végtelen sok $4k - 1$ alakú prím van. A második állítás innen n szerinti indukcióval adódik, a b)-beli pedig $\pi_{4,3}(q_n) = n$ felhasználásával és $n = [\log_2 \log_2 x]$ helyettesítéssel.

6. Legyen $(a, b) = 1$. A $\pi_{a,b}(p_n^{a,b}) = n$ összefüggésből a prímszámtétel szerint

$$1/\varphi(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi_{a,b}(p_n^{a,b})}{p_n^{a,b}/\log p_n^{a,b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \log p_n^{a,b}}{p_n^{a,b}}\,.$$

Hogyan lehetne a $\log p_n^{a,b}$-t $\log n$-re cserélni? Mivel a logaritmusfüggvény folytonos,

$$-\log\varphi(a) = \lim_{n\to\infty} \log n + \log\log p_n^{a,b} - \log p_n^{a,b}\,.$$

De $\log\log k/\log k$ nullához tart, ha $k \to \infty$, innen (a végtelenhez tartó) $\log p_n^{a,b}$-vel osztva kapjuk, hogy $\log n/\log p_n^{a,b}$ egyhez tart, ezt a fenti összefüggéssel kombinálva éppen a kívánt képlet adódik. Ebből a képletből is látjuk, hogy rögzített a, b mellett sokkal több $ak + b$ alakú prímszám van, mint négyzetszám, hiszen az n-edik négyzetszám $n^2 \gg \varphi(a) n \log n$.