Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév
Tizenkettedik alkalom

A **Nagy Prímszámtétel** azt mondja ki, hogy

$$\frac{\pi(n)}{\dfrac{n}{\log n}} \to 1 \quad \text{ha } n \to \infty$$

(itt $\pi(x)$ az x-nél nem nagyobb pozitív prímek száma, és a log a természetes logaritmus). Ha a, b egészek, akkor jelölje $\pi_{a,b}(x)$ az x-nél nem nagyobb $ak+b$ alakú pozitív prímek számát. Dirichlet tételének élesítése, a **számtani sorozatok prímszámtétele** azt mondja ki, hogy ha a értékét rögzítjük, akkor mindegyik $ak+b$ számtani sorozatban körülbelül ugyanannyi prímszám van, bárhogy is választjuk az a-hoz relatív prím b számot. Azaz

$$\frac{\pi_{a,b}(n)}{\dfrac{n}{\log n}} \to \frac{1}{\varphi(a)} \quad \text{ha } n \to \infty,$$

ahol $\varphi(a)$ az ilyen számtani sorozatok száma, azaz $\varphi(a) = |\{1 \le j \le a \mid (a,j) = 1\}|$.

1. *Számítsuk ki az alábbi értékeket. Használjuk fel, hogy* $\lim_{n\to\infty} n^{\varepsilon}/\log n = \infty$, *ha* $\varepsilon > 0$.

a) $\pi_{12,5}(100)$.
b) $\pi_{12,3}(234971)$.
c) $\pi_{12,5}(54807) - \pi_{12,125}(54807)$.
d) $\lim_{n\to\infty} \pi_{12,5}(n)/\sqrt{n}$. *Miből van több, $12k+5$ alakú prímből, vagy négyzetszámból?*
e) $\lim_{n\to\infty} \pi_{30,7}(n)/\pi_{11,5}(n)$. *Miből van több, $30k+7$ alakú, vagy $11k+5$ alakú prímből?*
f) $\lim_{n\to\infty} \pi_{22,17}(2n)/\pi_{22,17}(n)$.

2. *Bizonyítsuk be a Csebisev-tétel következő általánosítását: van olyan N szám, hogy minden $n \ge N$-re n és $1.00001n$ között van $22k+17$ alakú prím. Még általánosabban: minden a, b relatív prím egészekhez, és $\varepsilon > 0$ valós számhoz van olyan N egész, hogy minden $n \ge N$-re n és $(1+\varepsilon)n$ között van $ak+b$ alakú prím.*

3. *Mutassuk meg, hogy legalább $c\,N^{3/2}$ olyan (x,y,z) pozitív egészekből álló számhármas van, amelyre $x^2+y^2+z^2 \le N$, ahol $c > 0$ alkalmas konstans. Vezessük le ebből, hogy van olyan egész, amelynek legalább egymillió felbontása van három négyzetszám összegére.*

4. *Igazoljuk, hogy van olyan szám, ami legalább 1997-féleképpen áll elő egy $100k+11$ alakú és egy $47k+23$ alakú prím összegeként. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be azt az állítást, amelyben az 1997, 100, 11, 47, 23 helyett „általános" számok szerepelnek.*

5. *Jelölje q_n az n-edik $4k-1$ alakú prímet. (Mivel egyenlő q_8?)*

a) Mutassuk meg, hogy $q_{n+1} \le 4q_1q_2\ldots q_n - 1$, és innen $q_n \le 2^{2^n}$.
b) Mutassuk meg a prímszámtétel felhasználása nélkül, hogy $\pi_{4,3}(x) \ge [\log_2 \log_2 x]$.

6*. *Jelölje $p_n^{a,b}$ az n-edik $ak+b$ alakú prímszámot, ahol a, b rögzített, relatív prím egészek. Igazoljuk, hogy $p_n^{a,b}/n\log(n) \to \varphi(a)$, ha $n \to \infty$. (Vegyük észre, hogy $\pi_{a,b}(p_n^{a,b}) = n$, és alkalmazzuk a számtani sorozatok prímszámtételét.) Mutassuk meg ugyanezzel a módszerrel azt is, hogy az n-edik prímszám értéke „körülbelül" $n \log n$.*