Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév

Tizenegyedik alkalom

A Cardano-képlet. Az $x^3+px+q=0$ egyenlet gyökeit a következőképpen határozhatjuk meg. Legyen $D=(q/2)^2+(p/3)^3$ az egyenlet diszkriminánsa. Ha $\varepsilon=\cos 120°+i\sin 120°$, akkor ε primitív harmadik egységgyök, és ezért ha u jelöli a $-q/2+\sqrt{D}$ egyik (tetszőlegesen választott) köbgyökét, akkor a másik két köbgyök εu és $\varepsilon^2 u$. Számítsuk ki hasonló módszerrel $-q/2-\sqrt{D}$ köbgyökeit is, és ezek közül jelölje v azt, amelyre $uv=-p/3$ teljesül. Ekkor a fenti harmadfokú egyenlet összes gyökei $u+v$, $\varepsilon u+\varepsilon^2 v$ és $\varepsilon^2 u+\varepsilon v$ (amelyek között egyenlők is lehetnek, mégpedig pontosan akkor, ha $D=0$, vö. X/7. feladat).

1. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között.*

a) $x^3-6ix-i+8=0$. (A gyökök $(1+\sqrt{3}/2)+(1/2+\sqrt{3})i$, $(1-\sqrt{3}/2)+(1/2-\sqrt{3})i$, $-2-i$, ehhez $\sqrt{D}=\pm(i/2+4)$, $u=\cos 30°+i\sin 30°$, $v=2(\cos 60°+i\sin 60°)$.)

b) $x^3+12x-16i=0$. ($D=0$, $u=2(\cos 30°+i\sin 30°)$, $v=2(\cos 150°+i\sin 150°)$, $x^3+12x-16i=(x-2i)^2(x+4i)$, azaz a $2i$ kétszeres gyök.)

c) $x^3-21x+20=0$ (Számoljunk közelítőleg, scientific kalkulátorral végezve a trigonometrikus alakra való oda- és visszakonvertálást. Ekkor $u=\overline{v}=\sqrt{7}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, ahol $\alpha\approx 40.893°$. Ha pontosan számolnánk ez $2+i\sqrt{3}$ lenne. A gyökök 4, 1 és -5.)

2. *Bontsuk ki a binomiális tétel alapján az $(x+y)^6$ kifejezést.*

3. *Mutassuk meg, hogy ha p prímszám, és $x,y\in\mathbb{Z}$, akkor $(x+y)^p\equiv x^p+y^p\ (p)$.*

4. *Határozzuk meg $\pi(30)$ értékét.*

5. *Mely pozitív egész n számokra igaz, hogy $\pi(n+6)=\pi(n)+3$?*

6. *Mutassuk meg, hogy $\pi(x)$ monoton növekvő, és végtelenhez tart, ha $x\to\infty$.*

7. *Igazoljuk, hogy $x\geq 8$ esetén $\pi(x)\leq x/2$.*

8. *Mutassuk meg, hogy ha a és b komplex számok, akkor az $x+y=a$, $xy=b$ egyenletrendszer megoldásai éppen a $z^2-az+b=0$ egyenlet megoldásai.*

Gyakorló feladatok egységgyökökről

9. *Írjuk fel a $\sqrt{3}-i$ szám összes nyolcadik gyökét.*

10. *Határozzuk meg a primitív tizenkettedik egységgyökök összegét és szorzatát.*

11. *Írjuk fel az összes olyan huszonnyolcadik egységyököt, amelynek a rendje hét. Hány primitív huszonnyolcadik egységgyök van?*

12. *Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?*

13. *Mutassuk meg, hogy ha $n>0$ egész, $\varepsilon\in\mathbb{C}$, és $\varepsilon^n=i$, akkor $4\mid o(\varepsilon)\neq\infty$.*

14. *Mutassuk meg, hogy ha n páratlan pozitív egész, akkor a $2n$-edik primitív egységgyökök épp az n-edik primitív egységgyökök ellentettjei. (Először kis n számokra ellenőrizzük).*