Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév
Tizedik alkalom

1. *Döntsük el, melyek egységgyökök az alábbi számok közül. Mennyi ezek rendje?*

$$1\,, \quad -1\,, \quad i\,, \quad 1+i\,, \quad (1+i)/\sqrt{2}\,, \quad \cos(\sqrt{2}\pi)+i\sin(\sqrt{2}\pi)\,, \quad \cos(336^\circ)+i\sin(336^\circ)\,.$$

Mely n-ekre lesznek ezek a számok n-edik egységgyökök? És primitív n-edik egységgyökök? Írjuk fel az összes komplex 24-ik egységgyököt, és ezek rendjét.

2. *Adjuk meg az $x^4+4=0$, $x^6=1+i$, $x^n=-1$ egyenletek összes megoldását.*

3. *Számítsuk ki az n-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.*

4. *Ha ε primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet $o(-i\varepsilon)$?*

5. *Legyenek m és n pozitív egészek.*
 a) *Hány közös gyöke van az $x^n=1$ és $x^m=1$ egyenleteknek?*
 b) *Igazoljuk, hogy egy n-edik és egy m-edik egységgyök szorzata nm-edik egységgyök.*
 c) *Mutassuk meg, hogy egy n-edik és egy m-edik primitív egységgyök szorzata akkor és csak akkor nm-edik primitív egységgyök, ha m és n relatív prímek.*

6. *Melyik természetes számmal egyenlő $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$?*

7. *Legyen $p,q\in\mathbb{C}$, $D=(q/2)^2+(p/3)^3$, $u,v\in\mathbb{C}$ olyan, hogy $p=-3uv$, $q=-(u^3+v^3)$; $\varepsilon=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$, $x_1=u+v$, $x_2=\varepsilon u+\varepsilon^2 v$, $x_3=\varepsilon^2 u+\varepsilon v$. Bizonyítsuk be:*
 a) $\overline{\varepsilon}=1/\varepsilon=\varepsilon^2$ *és* $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$.
 b) $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p$, $x_1x_2x_3=-q$.
 c) $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3+px+q$ *(és ezért x^3+px+q gyökei x_1, x_2, x_3).*
 d) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-108D$.

Ha $p,q\in\mathbb{R}$, akkor
 e) $D=0\iff u^3=v^3$, *és ilyenkor mindegyik x_i valós;*
 f) $D>0$ *esetén u és v választható valósnak, ekkor az egyik gyök valós, a másik kettő nem, de egymás konjugáltjai;*
 g) $D<0$ *esetén u és v mindenképpen egymás konjugáltjai, és ezért minden gyök valós.*

Megoldás a IX. alkalom 9. feladatára. Legyenek a háromszög csúcsai A, B, C, $\varepsilon=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$, $\eta=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$. A szabályos hatszög felrajzolásából látjuk, hogy $\eta=1+\varepsilon$. Ha X jelöli az AB oldalra kifelé rajzolt szabályos háromszög középpontját, akkor az $\overrightarrow{XB}$ vektort 120 fokkal elforgatva az $\overrightarrow{YB}$ adódik, azaz $(B-X)\varepsilon=A-X$, ahonnan

$$X=\frac{A-B\varepsilon}{1-\varepsilon}\,,\quad \text{és hasonlóan}\quad Y=\frac{B-C\varepsilon}{1-\varepsilon}\,,\quad Z=\frac{C-A\varepsilon}{1-\varepsilon}\,.$$

Azt kell belátni, hogy az $\overrightarrow{XY}$ vektort 60°-kal elforgatva az $\overrightarrow{XZ}$-t kapjuk, azaz $(Y-X)\eta=(Z-X)$. A fentieket behelyettesítve és $1-\varepsilon$-nal szorozva:

$$((B-C\varepsilon)-(A-B\varepsilon))\,\eta=(C-A\varepsilon)-(A-B\varepsilon)\,.$$

Beírva, hogy $\eta=1+\varepsilon$, és átrendezve

$$A((-1-\varepsilon+\varepsilon+1)+B(1+\varepsilon+\varepsilon(1+\varepsilon)-\varepsilon)+C(-\varepsilon(1+\varepsilon)-1)=0\,.$$

Ez pedig teljesül, mert $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$ (mint a hatszögről leolvasható), és így A, B és C együtthatója is nulla.